



北京大学

博士研究生学位论文

题目：非线性弹性薄膜表界面

效应研究

姓名：郑婉莹

学号：2101111965

院系：力学与工程科学学院

专业：固体力学

研究方向：先进材料与结构力学

导师姓名：戴兆贺 研究员

学术学位

专业学位

二〇二六年六月

Research on Surface and Interface Effects of Nonlinear Elastic Thin Films

Dissertation Submitted to
Peking University

**In partial fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Natural Science**

By
ZHENG Wanying, B. Eng.
(Solid Mechanics)

Dissertation Supervisor: **DAI Zhaohe, Assistant Professor**

Department of Mechanics

School of Mechanics and Engineering Science

Peking University

June, 2026, Beijing

版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以任何方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。

摘要

近年来，薄膜材料已在微纳机电系统、柔性电子、软体机器人、脑机接口等高新技术领域获得广泛应用。薄膜的制备、精准转移与功能实现，均依赖其与空气、液相及异质固体介质间的相互作用，致使表面与界面效应对其变形行为与服役性能至关重要。与此同时，薄膜体系中表界面效应常与几何大变形、材料物理非线性耦合，传统线弹性力学分析框架已难以准确描述其力学响应规律。因此，有必要建立能够描述薄膜非线性变形与表界面效应的力学理论，以用于复杂界面约束条件下薄膜力学响应的预测与分析。本文基于动边界变分原理，建立刻画含自由界面的薄膜非线性变形理论框架，并系统分析表界面效应对薄膜力学行为的影响机制。本文主要完成的内容如下：

(1) 基于总自由能最小化方法，结合薄膜与液体自由界面的能量表达，在 Föppl-von Kármán 理论框架下建立了薄膜-液滴非线性润湿模型，阐明了薄膜的弯曲、拉伸及表面张力等作用在液滴诱导变形中的竞争平衡机制。结合满足标度能量平衡的薄膜面外变形特征挠度，定义了表征宏观变形程度的无量纲“可变形性”参数；在薄膜总张力中综合拉伸张力、预张力与表面张力的贡献，定义了表征弯曲效应在宏观尺度显著性的无量纲“可弯曲性”参数。通过数值求解，揭示了在弯曲刚度等关键参数变化主导下，薄膜在刚性极限、弯曲主导区间及拉伸主导区间的过渡规律与变形特征，从而为薄膜材料本征接触角的表征提供了理论方案。

(2) 发展了用于定量表征薄膜弹性毛细效应的实验与理论。基于面外加载实验中薄膜弹性与毛细作用的耦合机制，设计了薄膜与不同介质接触的压痕实验，将薄膜弹性毛细变形转化为可量化的力学响应。实验结果表明，相较于氮气-石墨烯界面，水-石墨烯界面的压痕力-位移曲线呈现出明显而稳定的软化现象，反映了固液界面张力对薄膜变形行为的调控。针对实验构型，建立了考虑表面张力作用的无矩薄膜压痕力学模型，系统研究了界面黏附与表面张力对压痕响应的影响。通过调节模型张力与刚度参数对实验结果进行拟合，验证了石墨烯的亲水特性。最后，针对薄膜实验中常见的下陷效应、弯曲效应以及鼓泡实验构型，对薄膜的弹性毛细实验与理论研究方法进行了拓展和推广。

(3) 建立了薄膜界面黏附问题与动边界变分问题之间的等价关系，据此推导了适用于非线性弹性薄膜体系的界面断裂准则。结合解析与数值方法，揭示了薄膜与刚性球体无摩擦黏附接触条件下所呈现的普适脱粘力规律。针对肥皂薄膜与刚性球体的接触问题，基于最小曲面原理给出了体系的解析解，并借鉴剥离问题中能量释放率的概念，定义了接触线处的界面黏附，从而得到了相应的力-位移关系。在无矩薄膜理论框

架下，通过对总势能进行变分，定义了接触问题的能量释放率，并系统分析了接触区几何非线性描述对脱粘力的影响。针对超弹性薄膜，通过总自由能最小化推导了体系的平衡方程与黏附接触条件，考察了材料参数、预拉伸及薄膜尺寸对脱粘过程中力-位移关系和力-接触半径关系的影响，并在此基础上将常数表面张力效应纳入大变形分析框架。结果表明，在上述各类薄膜体系中，脱粘力始终保持为 $\pi\Gamma_{ad}R_s$ 。该结果得到了基于内聚力模型的有限元技术验证，为薄膜材料表面黏附性能的标准化表征提供了有力的理论方案。

(4) 将表面弹性效应与动边界变分相结合，建立了固体材料表界面问题的变分分析框架。以任意形状悬浮薄膜与刚体的接触为例，变分推导得到了薄膜非线性表面弹性与体弹性共同作用下的控制方程及相应边界条件，并进一步分析了该能量框架在含固液界面的接触问题中的推广形式。针对典型的轴对称接触构型，系统考察了对称与非对称表面弹性对黏附接触行为的影响规律。结果表明，非对称表面弹性将引入变形连续性条件的改变，并导致脱粘力的相应变化。结合预拉伸条件下薄膜的变形特征，提出了非稳定脱粘力的理论预测公式，从而为基于压痕方法定量表征薄膜材料表面弹性性质提供了一种可行途径。

因此，本论文建立了考虑表界面效应的薄膜变形理论，并将该理论应用于薄膜的非线性润湿、压痕、脱粘等问题，为柔性薄膜在工程应用中的变形与可靠性分析提供了理论方案。

关键词：表界面效应，薄膜力学，能量变分，润湿，黏附

ABSTRACT

Thin film materials have been widely adopted in advanced technologies, including micro- and nano-electromechanical systems, flexible electronics, soft robotics, and brain-computer interfaces. Their fabrication, transfer, and functionalization involve interactions with gases, liquids, and solids, making surface and interface effects central to their deformation and performance. Meanwhile, these effects are often strongly coupled with large deformations and nonlinear material behavior, rendering linear elasticity inadequate for accurately describing the mechanical response of thin film systems. Therefore, a theoretical framework incorporating nonlinear deformations and surface and interface effects is essential for reliable prediction and analysis under complex interfacial constraints. This study develops a nonlinear theoretical framework for thin films based on a moving-boundary variational principle and systematically investigates the surface and interface effects governing their deformations. The main contributions are summarized as follows:

(1) A nonlinear wetting model is developed within the Föppl-von Kármán framework via total free energy minimization, revealing the competition between capillary-driven deformation and elastic resistance. Two dimensionless parameters are introduced to characterize film behavior. Deformability, derived from the energy balance and characteristic out-of-plane displacement, quantifies the overall macroscopic deformation. Bendability, accounting for stretching, pre-tension, and surface tension, assesses the relative importance of bending effects at the macroscopic scale. Numerical results reveal the transition mechanism among rigid, bending-dominated, and stretching-dominated regimes as key parameters, such as bending stiffness, are varied. These findings provide a theoretical foundation for characterizing the intrinsic contact angle of thin film materials.

(2) Experimental and theoretical methods are established to quantitatively characterize elastocapillary effects in thin films. Indentation tests are developed for films in contact with different media, linking elastocapillary effects under out-of-plane loading to measurable mechanical responses. The water-graphene interface exhibits clear and stable softening in the force-displacement response relative to the nitrogen-graphene interface, highlighting the influence of solid-liquid interfacial tension. Accounting for indenter-film interfacial interactions and surface tension in the non-contact region, a theoretical model is formulated to interpret the experimental observations and thereby quantitatively characterize graphene's intrinsic hydrophilicity. Supplementary analysis of bending stiffness and the sagging effect improves the completeness of the theory, and out-of-plane deformation experiments are extended to a bulge

configuration.

(3) An equivalence between thin film adhesion problems and moving-boundary variational formulations is established, leading to an interfacial fracture criterion for nonlinear elastic films. Analytical and numerical results reveal a universal pull-off force for frictionless adhesion between a thin film and a rigid sphere. For soap films, an analytical solution based on the minimal surface principle is obtained, and the interface adhesion-driven behavior is specified, yielding the corresponding force-displacement relationship. For Föppl films, the energy release rate is obtained using the total potential energy approach, and the effects of geometric nonlinearity are analyzed. For hyperelastic films, the governing equations and adhesion conditions are derived from total free energy minimization, and the effects of material properties, pre-stretch, film size, and surface tension are examined. The pull-off force is consistently found to follow $\pi\Gamma_{ad}R_s$, as confirmed by finite element simulations based on a cohesive contact model, providing a theoretical basis for standardized characterization of thin film adhesion.

(4) A unified variational framework for surface and interface problems in solids is formulated by incorporating surface elasticity and moving-boundary variations. The contact problem of an arbitrary-shape film-rigid-body system is analyzed, accounting for both nonlinear surface and bulk elasticity. Restricting the system to the classical circular film-sphere contact, (a)symmetric surface elasticity in adhesion is elucidated. Asymmetric surface elasticity modifies the continuity of deformation at the contact line, thereby altering the pull-off force. Incorporating simplified deformation under pre-stretching, a theoretical prediction formula for unstable pull-off force is proposed, providing a feasible method for quantifying surface elasticity through indentation.

In summary, a theoretical framework for thin film deformation incorporating surface and interface effects is established and applied to nonlinear wetting, indentation, adhesion, and delamination. This framework forms a foundation for analyzing deformation and assessing the reliability of flexible thin films in engineering applications.

KEYWORDS: Surface and interface effects, Thin film mechanics, Energy-based variational methods, Wetting, Adhesion

目录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景和意义	1
1.1.1 薄膜材料的应用与发展动态	1
1.1.2 薄膜非线性力学理论与能量框架	4
1.1.3 薄膜表界面效应及力学描述	5
1.2 薄膜的润湿行为	7
1.2.1 经典块体润湿问题	7
1.2.2 弹性薄膜润湿问题	9
1.3 薄膜的弹性毛细效应	11
1.4 薄膜的黏附行为	13
1.4.1 经典块体黏附理论	13
1.4.2 弹性薄膜黏附问题	15
1.5 本文研究内容	17
第二章 弹性薄膜的非线性润湿	21
2.1 引言	21
2.2 毛细作用下的薄膜非线性润湿模型	22
2.2.1 总自由能及能量变分	22
2.2.2 控制方程与边界条件	24
2.2.3 无量纲化与数值求解	27
2.3 薄膜可变形性与可弯曲性无量纲参数	28
2.4 毛细作用下的薄膜润湿平衡状态	31
2.4.1 弯曲刚度的影响	31
2.4.2 液滴尺寸的影响	33
2.4.3 拉伸刚度的影响	35
2.5 液滴重力对薄膜润湿行为的影响	36
2.6 本章小结	37
第三章 薄膜弹性毛细效应实验与理论	39
3.1 引言	39
3.2 弹性毛细效应压痕实验	40
3.2.1 实验装置与样品制备	40

3.2.2	实验测试方法.....	42
3.2.3	实验结果与现象分析.....	44
3.3	含常数表面张力的无矩薄膜压痕理论	45
3.3.1	平衡方程与接触线条件	45
3.3.2	基于平衡方程的标度率分析	48
3.3.3	无量纲化与数值求解.....	49
3.4	表界面效应分析及实验解释	50
3.4.1	界面黏附.....	50
3.4.2	表面张力.....	52
3.5	弹性毛细效应的补充分析与实验拓展	55
3.5.1	薄膜弯曲效应.....	55
3.5.2	薄膜下陷行为.....	57
3.5.3	弹性毛细效应鼓泡实验	58
3.6	本章小结	59
第四章	非线性弹性薄膜的黏附理论	61
4.1	引言	61
4.2	肥皂薄膜	62
4.3	无矩薄膜	65
4.3.1	总势能变分与能量释放率.....	65
4.3.2	数值求解及脱粘力分析	69
4.4	超弹性薄膜.....	71
4.4.1	总势能变分与能量释放率.....	71
4.4.2	数值求解.....	75
4.4.3	脱粘力分析	77
4.5	表面张力作用下的超弹性薄膜脱粘.....	80
4.6	薄膜黏附接触的有限元分析	82
4.6.1	模拟方法.....	82
4.6.2	结果讨论.....	84
4.7	本章小结	86
第五章	非线性弹性薄膜表界面问题的变分理论	87
5.1	引言	87
5.2	非线性表面弹性体系的动边界变分框架	88
5.2.1	场变分	89

5.2.2 几何变分.....	91
5.3 非线性表面弹性薄膜的接触与界面平衡.....	93
5.3.1 薄膜-刚体接触的能量变分.....	94
5.3.2 薄膜-刚体接触线的平衡条件与能量判据.....	97
5.3.3 固液界面参与的接触线平衡.....	99
5.4 表面弹性对薄膜脱粘行为的影响.....	100
5.4.1 数值求解框架.....	100
5.4.2 预拉伸条件下的表面弹性效应.....	103
5.5 本章小结.....	106
第六章 结论与展望	109
6.1 论文工作总结.....	109
6.2 未来研究展望.....	110
参考文献	113
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果	125
致谢	127

主要符号对照表

下表列出本文所使用的主要符号，部分符号如有其它含义，具体通过上下文说明加以区分。

符号	物理意义
E	弹性模量
B	弯曲刚度
Y	拉伸刚度
ν	泊松比
t	厚度
u	面内变形
z	面外挠度
T	预张力
ϵ	应变
λ	伸长比
R_f	薄膜固定端半径
R_s	刚性球体半径
r_c	接触半径
Π	总自由能
N	薄膜拉伸张力
κ	曲率张量
Φ	应力函数
Γ_{ad}	界面黏附能
G	能量释放率
F_c	脱粘力
\mathbf{I}_s	切向投影算子
τ	薄膜总张力

φ	变形映射
φ_s	表面变形映射
\mathbf{F}	变形梯度
\mathbf{F}_s	表面变形梯度
Γ	表面能密度（参考构型）
W	薄膜拉伸应变能密度（参考构型）
γ	表面能密度（变形构型）
w	薄膜拉伸应变能密度（变形构型）
\mathbf{P}	第一 Piola-Kirchhoff 弹性张力
\mathbf{P}^s	第一 Piola-Kirchhoff 表面张力
Υ	柯西表面张力
σ	柯西弹性应力
Ψ_t	几何扰动映射
I_0	接触区域（参考构型）
O_0	非接触区域（参考构型）
I	接触区域（变形构型）
O	非接触区域（变形构型）
$\Delta \mathbf{X}_c$	接触线位置变分（参考构型）
$\delta \mathbf{x}_c$	接触线位置变分（变形构型）
μ	弹性剪切模量
μ^s	表面剪切模量

第一章 绪论

1.1 研究背景和意义

1.1.1 薄膜材料的应用与发展动态

薄膜材料是指平面方向可自由延展，而厚度方向受到显著约束的材料体系。近年来，随着微纳制造技术的发展，薄膜厚度从微米级减小至纳米级甚至原子级，超薄厚度赋予薄膜高度可变形性，同时较大的比表面积增强了薄膜与其他介质接触时的界面效应。基于这些特性，薄膜在微纳器件、柔性设备、脑机接口等其他高性能领域得到了广泛应用。

在微纳机电系统 (MEMS/NEMS) 中，薄膜材料作为关键的结构层或功能层被广泛应用于各类器件。例如，薄膜在外力作用下的机械变形会引起电学响应，这一特性可用于设计高灵敏度的压力传感器。图1.1(a) 和 (b) 分别展示了基于电阻^[1]变化和电容^[2]变化的压力传感器设计。此外，功能薄膜还可实现调控、传感和探测等多种功能。在如图1.1(c) 所示的复合结构中，单层石墨烯薄膜既作为电导通道，又作为界面引入电热机械效应，实现对器件形变和共振特性的调控^[3]。在如图1.1(d) 所示的 MEMS 微镜中，悬浮薄膜构成了高平整度的反射面，保证了光学性能的稳定^[4]。

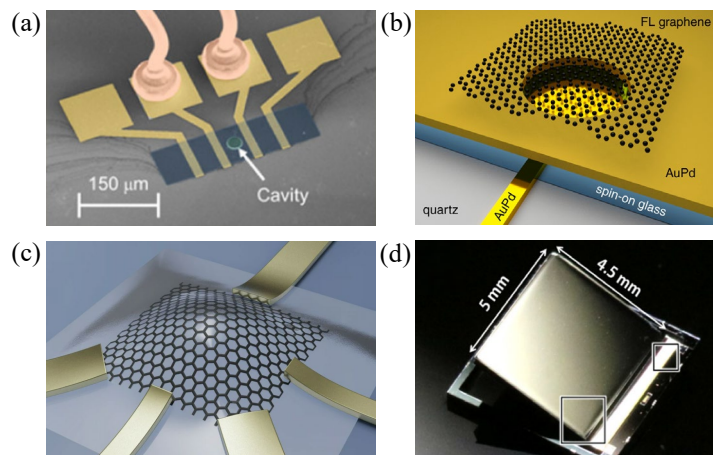


图 1.1 薄膜材料在微纳机电系统中的应用：(a) 压阻式石墨烯压力传感器^[1]；(b) 电容式石墨烯压力传感器^[2]；(c) 金属-石墨烯-氮化硅复合器件^[3]；(d) 硅边框约束的大面积超薄微镜^[4]

在柔性电子器件领域，薄膜材料优异的柔韧性和电学性能使器件在拉伸、弯曲甚至折叠条件下仍能稳定工作。例如，全橡胶一体化电子装置在大变形下仍能实现触觉传感功能^[5]（图1.2(a)），碳纳米薄膜晶体管构建的柔性高速电路可贴附于隐形眼镜等曲面结构^[6]（图1.2(b)），通过波浪状互连和中性平面设计的可拉伸硅电路能够承受大挠曲变形^[7-8]（图1.2(c)），超薄磁传感器矩阵可用于可穿戴磁性电子皮肤^[9]（图1.2(d)）。

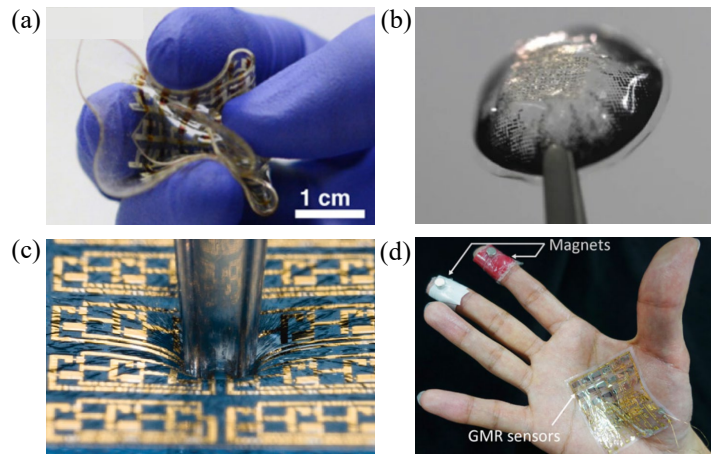


图 1.2 薄膜材料在柔性器件领域的应用：(a) 全橡胶集成柔性电子器件^[5]；(b) 附着在隐形眼镜上的柔性电子箔^[6]；(c) 可拉伸硅集成电路^[8]；(d) 自给式磁性电子皮肤^[9]

薄膜材料通过提供柔性结构支撑、传感和驱动功能，还广泛应用于软体机器人领域。如图1.3(a)所示，悬挂式薄膜材料的径向膨胀可转化为软体执行器的轴向收缩，实现抓取和搬运功能^[10]。充气薄膜结构可实现仿生运动，如图1.3(b)所示的双气囊结肠镜，通过交替充放气驱动两硅橡胶弹性薄膜气囊依次固定与释放，产生尺蠖式推进^[11]。在昆虫尺度的微型飞行机器人中，多层薄膜构成的软体制动器具有高功能密度和频率特性，可实现运动控制并在碰撞后自动恢复，如图1.3(c)所示^[12]。此外，薄膜材料良好的变形与界面黏附特性使人工肌肉在循环连续变形下保持稳定，实现如图1.3(d)所示的动态蝴蝶挥翅等连续运动^[13]。

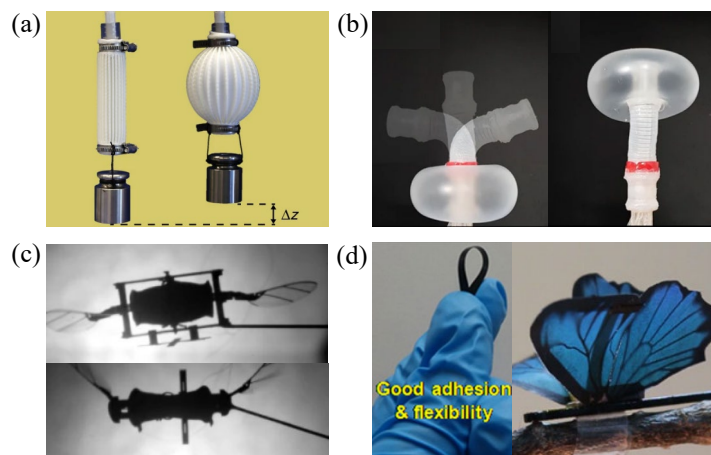


图 1.3 薄膜材料在软体机器人领域的应用：(a) 具有编程运动模式的软执行器^[10]；(b) 软气动尺蠖双气囊微型机器人^[11]；(c) 柔性人工肌肉驱动飞行机器人^[12]；(d) 具有良好弯曲性及黏附性的人工肌肉驱动器^[13]

薄膜材料在新兴的脑机接口领域也发挥着不可或缺的作用。薄膜材料质量轻、厚度薄，且不同类型的薄膜可集成多种功能，使其作为植入生物体内的感应装置时，能够尽量降低对组织的损伤^[14-15]。例如，图1.4(a)展示了植入活体小鼠大脑的亚细胞尺寸超

柔性纳米电子线探针，植入过程中仅造成极轻微损伤^[15]。此外，如图1.4(b)所示，薄膜材料具有较大的比表面积和高度可变形性，可实现与生物组织的紧密贴合^[16-17]。

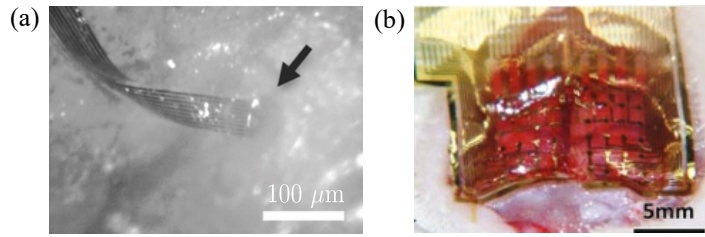


图 1.4 薄膜材料在脑机接口领域的应用：(a) 递送至活体小鼠大脑的纳米电子线薄膜探针^[15]；(b) 贴附在大鼠脑部的丝蛋白软体生物电子设备^[17]

综上所述，薄膜材料在众多前沿领域展现了多样化功能和优异性能。图1.5总结了自 1990 年代以来代表性薄膜体系的典型结构与功能演化。从功能性氧化物^[18]与导电聚合物薄膜^[19]，到纳米结构半导体薄膜^[20-21]，到二维材料^[22]及超薄氧化物薄膜^[23]，再到具有扭转结构^[24]或功能化^[25]的先进二维与聚合物薄膜，薄膜材料不断趋于更薄、长细比更大的极限，且应用场景更为复杂。

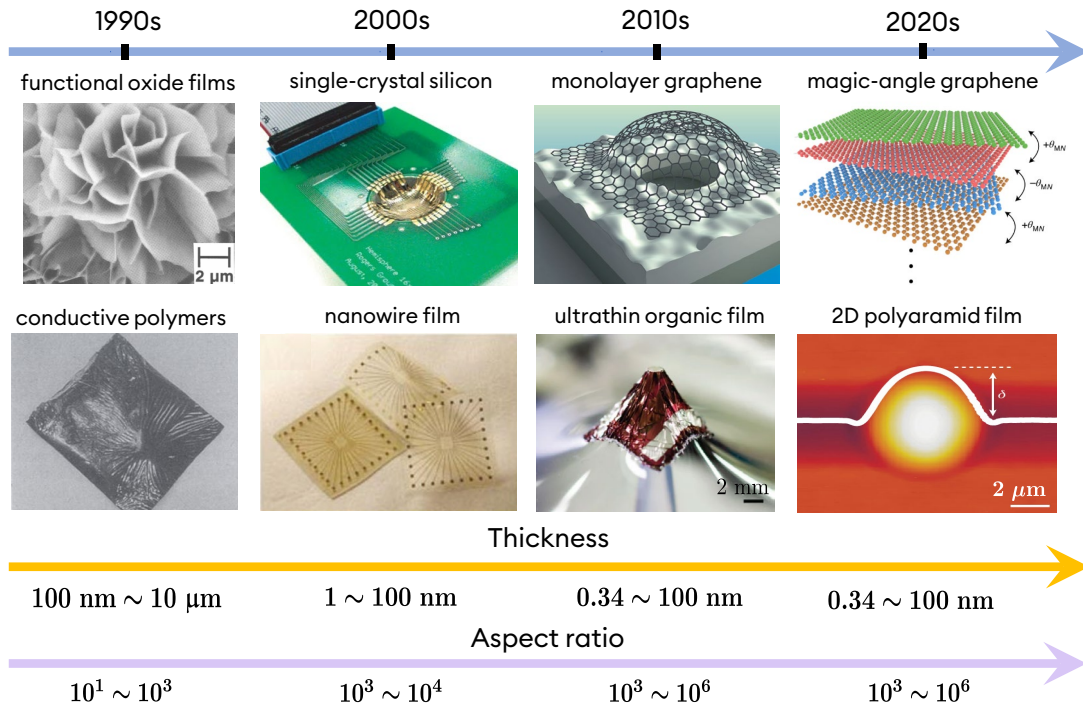


图 1.5 薄膜材料的发展：功能氧化物薄膜^[18]、导电聚合物^[19]（1990s），单晶硅^[20]、纳米线薄膜^[21]（2000s），单层石墨烯^[22]、超薄氧化物薄膜^[23]（2010s），魔角石墨烯^[24]、二维聚合物薄膜^[25]（2020s）

在薄膜尺寸、形状与功能不断精细化调控的背景下，薄膜力学研究具有重要的基础性意义，其为预测性能、指导结构设计以及拓展应用提供了理论支撑。接下来介绍薄膜非线性力学理论的发展及能量框架。

1.1.2 薄膜非线性力学理论与能量框架

薄膜非线性力学理论起源于经典的 Kirchhoff-Love 薄板理论^[26]。该理论通过无挤压假设、直法线假设以及中面无伸缩假设，将薄板的三维位移未知量简化为单一的法向中面挠度 $z(x,y)$ 。在这一框架下，板的弯曲刚度 B 成为主导力学参数，弯矩与中面曲率呈线性关系

$$M_{\alpha\beta} = -B[(1-\nu)\partial_\alpha\partial_\beta z + \nu\delta_{\alpha\beta}\nabla^2 z], \quad \alpha, \beta = x, y \quad (1.1)$$

其中， ν 为泊松比。考虑纯弯曲，厚度方向面内应变在小挠度、小转角条件下线性化为

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\eta) = -\eta\partial_\alpha\partial_\beta z, \quad \eta \in [-t/2, t/2] \quad (1.2)$$

其中， t 和 η 分别为板厚及厚度方向的局部坐标。由此可得薄板的经典弯曲平衡方程：

$$B\nabla^4 z = q(x, y) \quad (1.3)$$

其中， q 为薄板所承受的面外荷载。上述处理将薄板弯曲问题简化为二维中面描述的线性框架，为后续引入几何非线性提供了自然的数学和物理基础。

对于厚度极薄、弯曲可忽略的薄膜，其力学行为可通过无矩薄膜（Föppl 膜）理论^[27]描述。此时，面内位移 $u_\alpha(x, y)$ 和法向挠度 $z(x, y)$ 都作为自由度，面内应变保留几何非线性贡献：

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha z \partial_\beta z), \quad \alpha, \beta = x, y \quad (1.4)$$

上式中， $\partial_\alpha u_\beta$ 和 $\partial_\beta u_\alpha$ 对应面内位移的线性应变部分， $\partial_\alpha z \partial_\beta z$ 则由中面挠度的梯度产生，是几何非线性的主要来源，这表明无矩薄膜理论适用于大挠度变形的情形。无矩薄膜的力学行为由二维面内应力主导，其与应变的线弹性关系可表示为

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2}[(1-\nu)\varepsilon_{\alpha\beta} + \nu\delta_{\alpha\beta}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \quad (1.5)$$

其中， E 为弹性模量。无矩薄膜的应力需满足面内平衡方程

$$\partial_\beta \sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.6)$$

以及横向荷载 $q(x, y)$ 作用下的面外平衡方程

$$\partial_\alpha(\sigma_{\alpha\beta}\partial_\beta z) + q(x, y) = 0 \quad (1.7)$$

进一步同时考虑弯曲效应与几何非线性，薄板的变形行为可由 Föppl-von Kármán (FvK) 理论^[28]统一描述，其应变为纯弯曲贡献与无矩薄膜应变的叠加：

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\eta) = -\eta\partial_\alpha\partial_\beta z + \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha z \partial_\beta z), \quad \eta \in [-t/2, t/2] \quad (1.8)$$

FvK 理论下，弯矩仍满足 Kirchhoff-Love 理论中的曲率关系（式(1.1)），面内应力由式(1.5)给出；弯曲与面内拉伸共同参与薄板的力学平衡，其中面内应力需满足平衡条

件(1.6), 同时在外部横向荷载作用下, FvK 板的法向变形需满足弯曲与拉伸耦合的面外平衡方程

$$B\nabla^4 z + \sum_{\alpha,\beta} \partial_\alpha(\sigma_{\alpha\beta} \partial_\beta z) + q(x,y) = 0 \quad (1.9)$$

以上对薄板(薄膜)非线性力学理论的简述呈现了不同理论的适用范围与递进关系: Kirchhoff-Love 薄板理论适用于小挠度、小应变的薄板弯曲问题; 无矩薄膜理论强调面内应力主导, 适用于弯曲刚度可忽略、面内拉伸占主导的薄膜变形问题; FvK 理论则综合考虑弯曲和几何非线性, 适用于大挠度、小应变的薄板问题。

当薄膜变形超出小应变或中等挠度范围时, 则需要采用有限变形薄膜理论。在该理论中, 薄膜的变形可由映射 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ 描述, 其中 \mathbf{X} 与 \mathbf{x} 分别表示参考构型与当前构型中的材料点位置。相应的面内变形由变形梯度 $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$ 刻画, 应变不再采用线性或 FvK 形式, 而由有限应变张量定义, 如 Green-Lagrange 应变^[29-30]

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (1.10)$$

在这一框架下, 材料的应力响应由相应本构关系给出, 而体系的平衡状态由参考构型下的动量守恒条件确定。

贯穿非线性变形理论的核心在于, 系统的力学响应由各类能量占据总能量的相对权重决定。不同理论模型可视为统一能量框架在不同尺度条件与主导机制下的渐近形式。薄板体系非线性变形的能量泛函可统一表示为

$$\Pi[\mathbf{x}] = \int_{\Omega_0} W_{\text{stretch}}(C_{\alpha\beta}) dA + \int_{\Omega_0} W_{\text{bend}}(K_{\alpha\beta}) dA - \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

其中, $C_{\alpha\beta}$ 和 $K_{\alpha\beta}$ 分别是中面面内拉伸度量与广义曲率张量。在统一的能量表述中, 不同力学模型可通过几何非线性项的保留程度自然分层: 拉伸度量与曲率的完整非线性表达被保留时, 对应最一般的非线性描述; 保留面内应变中的几何非线性项而对曲率关系进行线性化处理时, 对应 FvK 理论; 完全线性化几何量后, 能量退化为位移的二次型, 得到 Kirchhoff-Love 线性薄板理论。在具体的薄膜力学问题中, 不同理论的适用边界通常可借助若干无量纲参数进行界定, 例如反映弯曲与拉伸相对贡献的能量比, 表征几何非线性强度的挠度尺度参数等, 这些无量纲参数的阈值可结合具体问题确定。

能量分析方法的普适性为研究薄膜的表界面效应提供了便利, 该效应在薄膜应用中普遍存在且具有重要作用, 接下来将对其进行介绍。

1.1.3 薄膜表界面效应及力学描述

表界面效应是指材料表面或不同相之间的界面, 由于其物理或力学性质显著不同于体相, 而对体系整体行为产生不可忽略影响的一类现象。薄膜材料具有较大的比表面积和良好的可变形性, 容易与周围介质接触并形成界面, 从而产生显著的表界面效

应。这些表界面效应在薄膜器件的变形调控及功能实现中发挥着重要作用。例如，在超薄生物电子器件领域，可通过液滴润湿转印薄膜材料^[16]，液滴在薄膜与三维生物表面之间形成润滑界面，使薄膜在贴附过程中可局部滑移并动态释放应力，从而实现无损的共形包覆，如图1.6(a)所示。在柔性可变形材料的研发方面，液滴毛细诱导可使薄膜生成褶皱，从而承受远超其本征弹性的形变^[31]，如图1.6(b)所示。在柔性界面设计领域，将电场施加于弹性润湿薄膜，可实现液滴位置和形状的综合调控^[32]，如图1.6(c)所示。

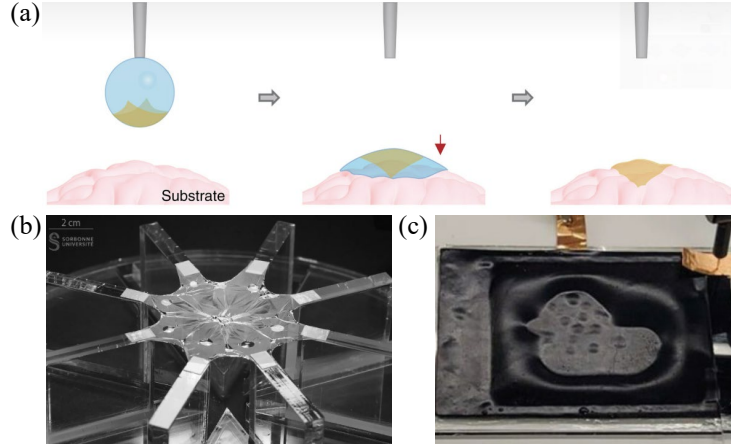


图 1.6 薄膜应用场景中的表界面效应: (a) 薄膜器件的液滴转印^[16]; (b) 毛细诱导的超薄膜形态变化^[31]; (c) 基于电弹润湿方法的液滴操控^[32]

这些应用场景中，薄膜的行为由表界面效应与非线性变形共同主导。对这种耦合作用进行力学分析时，由于接触形态多样且接触线可自由演化，体系引入了动边界问题，使得直接解析求解较为困难。能量方法能够将弹性能、界面能及外荷载作用统一纳入变分框架，因此在描述此类耦合问题时更为清晰和高效。基于此，将各接触界面的表面能引入能量体系，薄膜的总能量泛函可写为

$$\Pi[\mathbf{x}, \Omega] = \int_{\Omega_0} W_{\text{stretch}}(C_{\alpha\beta}) dA + \int_{\Omega_0} W_{\text{bend}}(K_{\alpha\beta}) dA + \int_{\Omega_s} W_{\text{surface}} dA - \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

其中， Ω_s 为考虑表面能的全部表面或界面面积。根据能量最小化原理，系统平衡由总自由能的变分极值条件给出，即 $\delta\Pi = 0$ 。对于涉及接触或自由边界的薄膜体系，由于材料变形与积分域演化均会引起能量变化，总能量的变分可自然分解为

$$\delta\Pi = \delta_{\mathbf{x}}\Pi + \delta_{\Omega}\Pi = 0 \quad (1.13)$$

其中， $\delta_{\mathbf{x}}\Pi$ 为材料变形引起的能量变化， $\delta_{\Omega}\Pi$ 为几何域或界面演化引起的能量变化。

在方程(1.12)中，表面能密度 W_{surface} 需要根据具体的界面形式确定。对于液体体系，由于其表面分子可自由移动，体系热力学平衡既可描述为表面能量最小化，也可描述为表面张力的平衡状态，二者数值相等且不需要严格区分。而对于固体材料，其表面分子相对固定，表面能和表面张力在概念上具有本质区别：固体表面能指单位面积固体表面所具有的额外能量，主要反映热力学性质；而表面张力是固体表面抵抗形变或界

面拉伸的力学量。这一概念被称为固体表面弹性,最早由 Gibbs^[33] 提出, Shuttleworth^[34] 基于热力学分析最早对其进行了公式化刻画,即原始热力学形式的 Shuttleworth 方程

$$\Upsilon = \gamma + A_s(d\gamma/dA_s) \quad (1.14)$$

其中, Υ 为表面张力, γ 为表面 Helmholtz 自由能, A_s 为表面面积。现代研究中 Shuttleworth 方程通常直接表示为应变的形式,即

$$\Upsilon = \gamma \mathbf{I} + \frac{\partial \gamma}{\partial \epsilon_s} \quad (1.15)$$

其中, ϵ_s 为表面应变张量。基于该方程可以对固体材料的表面弹性进行类似于体弹性的能量、本构、变形等分析。需要指出,表面弹性效应通常在大变形情况下才需要考虑,对于小变形或中等程度变形,有关研究一般认为表面张力与表面能密度在数值上相等且为常数^[35-36],并基于这一假设对表界面效应与弹性变形的耦合作用进行讨论。

综上所述,薄膜材料在众多先进领域具有重要应用价值。准确描述薄膜非线性变形与表界面效应具有较高的理论挑战性,且与实际应用紧密相关,因此受到了研究人员的广泛关注。以下针对典型的薄膜表界面力学问题进行系统综述,包括薄膜润湿、薄膜弹性毛细效应以及薄膜黏附接触。

1.2 薄膜的润湿行为

润湿是最典型的固液接触行为之一,描述了液体在固体表面铺展、停留或回缩时的界面构型与力学平衡状态。作为界面科学与流体力学中的经典问题,块体材料上的润湿最早得到系统研究,其理论框架以界面张力平衡和接触角选择为核心,相关实验与模型已相对完备成熟。对块体润湿的理解为固液界面相互作用提供了基本物理图像,也为薄膜等高度可变形体系的研究提供参照。因此,在讨论薄膜润湿问题前,有必要回顾块体润湿的经典理论与实验。

1.2.1 经典块体润湿问题

图1.7(a)和(b)展示了两种极限情形的润湿状态:刚性基底上的润湿与液体基底上的润湿。其中,液滴-刚性基底系统的总自由能仅包含液滴的表面能,对其进行变分,得到经典的 Young 关系^[37-38]:

$$\gamma_{sv} = \gamma_{sl} + \gamma_v \cos \theta \quad (1.16)$$

上式中, γ_{sv} 、 γ_{sl} 和 γ_v 分别为固气界面、固液界面及液气界面的表面张力。而当基底为液体时,由于其无法承受剪切应力,接触线处的三相界面必须满足矢量张力平衡,即 Neumann 平衡^[38-39]:

$$\vec{\gamma}_{sv} + \vec{\gamma}_{sl} + \vec{\gamma}_v = 0 \quad (1.17)$$

此情况下，基底可自由变形，界面张力主导局部几何。

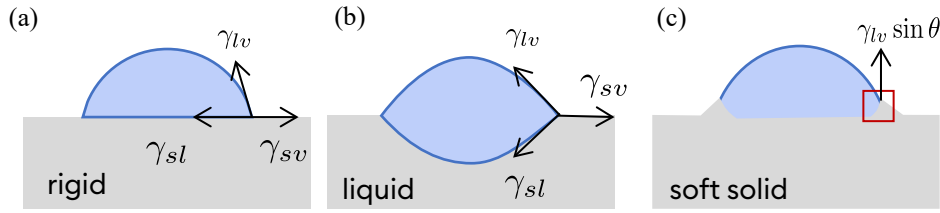


图 1.7 不同基底条件的润湿行为：(a) 刚性基底；(b) 液体基底；(c) 软固体基底

软固体材料的润湿行为处于上述二者之间，弹性体既能够为液体提供有效的机械支撑，又允许在液滴作用下发生局部变形。因此，软固体表面在三相接触线附近被液体表面张力 $\gamma_{lv} \sin \theta$ 向上牵引，形成一个局部抬升的变形结构，该结构被称为润湿脊，如图 1.7(c) 所示。润湿脊反映了接触线处界面张力与固体弹性的平衡，其几何特征对材料变形和表界面效应高度敏感，构成了理解和表征软固体润湿行为的核心物理对象。

早期软固体润湿实验主要集中于润湿脊的清晰表征，并逐步从静态观测^[40-41]发展到动态监测^[42-44]，如图 1.8(a)-(e) 所示。此类实验的重要延伸在于通过润湿脊几何特征测量材料表面弹性，图 1.8(f) 和 (g) 分别展示了经典的表面弹性参数测量^[45]及润湿诱导相分离^[46]的研究。此外，软固体润湿实验还可用于探索新型材料的力学性能，例如基于光开关的软凝胶润湿脊调控^[47]以及聚合物玻璃态与橡胶态的转化演变^[48]，分别见图 1.8(h)-(i)。理论方面，软固体的润湿研究主要包含两个主线，一方面是对接触线行为的力学刻画，另一方面是基底整体变形的分析。基于对目前研究的总结，软固体润湿接触线处的力学行为主要通过第一和第二边界条件描述。第一边界条件对应固体内部弹性应力的连续性，应力奇异性较弱时，该条件退化为图 1.8(j) 所示三个方向界面张力的 Neumann 定律。第二边界条件对应表面应变的非连续性，来源于图 1.8(k) 所示的物质交换能量变分，因而反映了接触线两侧化学势的守恒^[54-55]。可变形基底的整体变形体现了块体润湿问题的多尺度特征。Marchand 等人^[49]发现，随着无量纲参数 $\gamma/(Ea)$ 增大，固相接触角 (θ_L) 和液相接触角 (θ_S) 之间的几何关系会由 Young 关系过渡到 Neumann 关系，如图 1.8(l) 所示。Wang 等人^[50]研究发现，对于刚性基底上软固体的润湿，随着无量纲参数 $(h^3\gamma/E)^{1/4}/R$ 增大，液滴凹陷深度 H 与润湿脊高度 D 的变化规律反映了变形机制由弹性主导向毛细主导的尺度转变，如图 1.8(m) 所示。此外，针对块体润湿脊的研究还包含众多基于分子动力学^[51]或有限元方法^[52-53]的模拟，如图 1.8(n)-(p) 所示。

由以上实验、理论及模拟方面的研究可以看出，围绕润湿脊的表征，可变形块体材料的润湿行为可以被准确地描述。相较而言，薄膜体系具有极低的弯曲刚度与显著的尺度分离特征，液体接触诱发的力学响应往往表现出更强的非线性，此时表界面作用不再局限于局部接触区域，而是直接参与并重塑薄膜的整体构型，块体润湿理论的沿袭与改变是值得关注的问题。接下来，对薄膜体系润湿的研究现状进行综述。

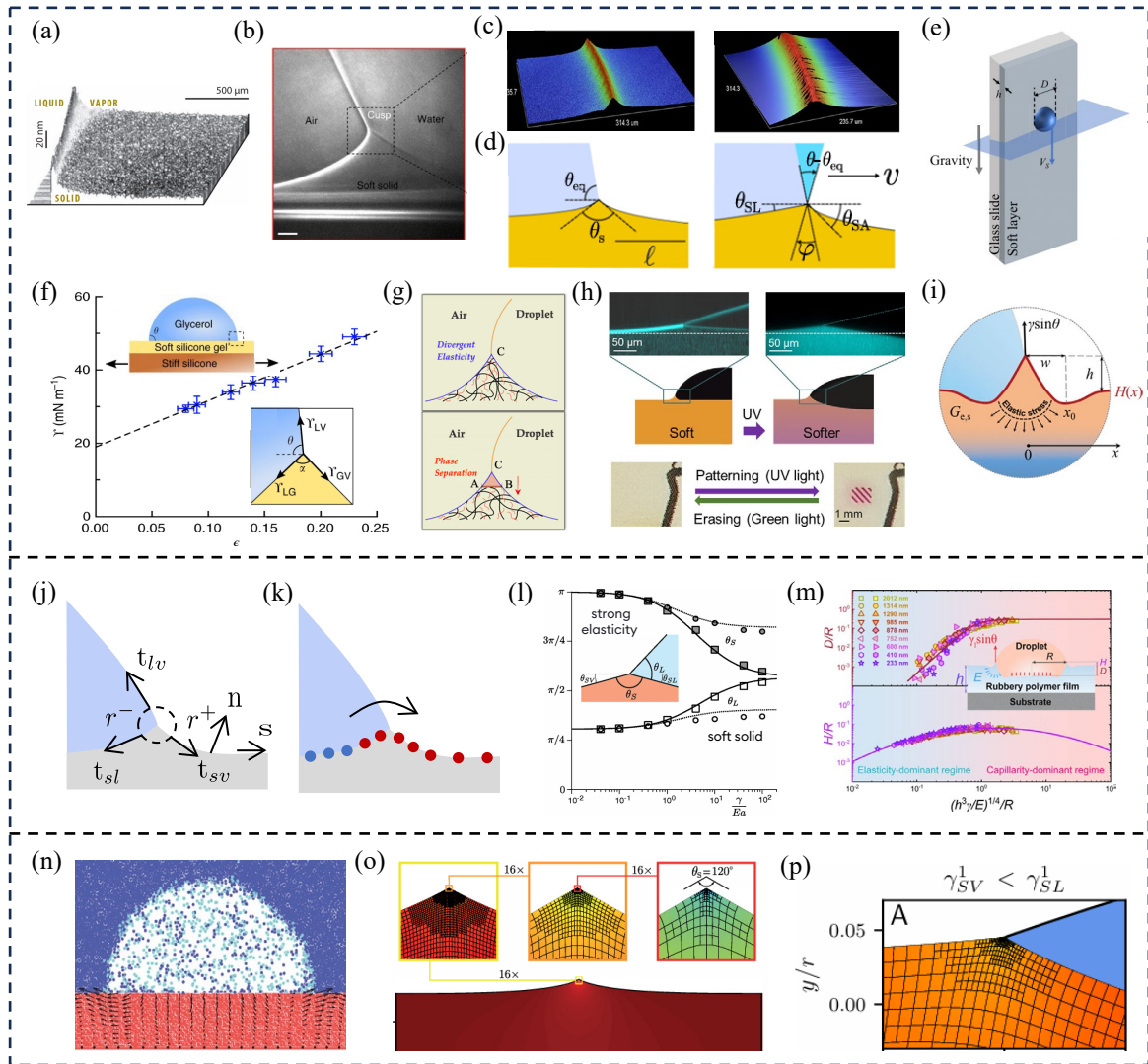
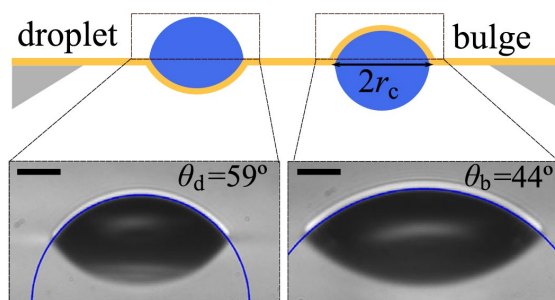


图 1.8 软固体润湿研究: (a) 显微镜下的软凝胶润湿脊^[40]; (b) X 射线下的软凝胶润湿脊^[41]; (c) 蒸发液滴的接触线轮廓^[42]; (d) 静态与动态润湿脊的几何结构^[43]; (e) 重力下滑润湿实验^[44]; (f) 基于润湿实验的表面弹性参数测量^[45]; (g) 润湿脊弹性能分布调节^[46]; (h) 紫外调控下光开关凝胶的润湿脊变化^[47]; (i) 基于润湿脊诱导的聚合物表面弹性研究^[48]; (j) 软固体润湿接触线处的曲线坐标系; (k) 接触线坐标固定时基底物质点的迁移; (l) 柔性参数引起的接触角变化^[49], a 为接触线附近的微观尺度; (m) 液滴对缠结聚合物橡胶的力学行为调控^[50]; (n) 软固体与液滴接触中气泡演化的分子模拟^[51]; (o) 局部接触线力诱导的对称润湿脊有限元模拟^[52]; (p) 非对称表面弹性下的润湿脊有限元模拟^[53]

1.2.2 弹性薄膜润湿问题

薄膜润湿最典型的形态是液滴在悬浮薄膜上的铺展，相关研究多针对这一润湿形态展开，本节对该领域的研究现状进行综述。实验方面，薄膜润湿最直观的观测量依旧是接触线处各界面的接触角。当液滴尺寸足够小时，其重力效应可以忽略，液滴诱导的薄膜变形主要由毛细作用主导。因此，无论液滴位于薄膜上方还是下方，均通过相同的机制诱导薄膜发生变形，如图1.9所示^[56]。


 图 1.9 悬浮的薄膜润湿实验^[56]

润湿角测量实验证明，高度可变形薄膜在润湿接触线处的平衡类似于 Neumann 关系，但薄膜部分的张力不仅包括表面张力，还包含拉伸张力。薄膜承受较大预张力时，拉伸张力近似为均匀预张力，接触线处的接触角完全由几何构型和力矢量平衡决定，而无需考虑膜内部应力的详细分布。这种描述被称为“纯几何理论”。Kozyreff 等人^[57]证明，纯几何理论是润湿系统的能量最小化在高预张力极限下的几何降维结果，并利用这一理论揭示了液滴润湿与薄膜形变之间的本质联系。

事实上，薄膜既可以拉伸又可以弯曲，其张力分布与变形场往往呈现复杂空间变化，需要借助非线性理论进行系统分析。Shanahan^[58]在这一框架下开展了奠基性研究，通过能量变分方法系统地引入薄膜弹性，将液滴-薄膜润湿体系视为受体积约束的自由能最小化问题，并利用总能量极小条件确定体系的平衡状态。结果表明，薄膜润湿角由界面能与弹性响应共同决定。在薄板极限下，接触线处的法向毛细力主要通过诱导基底弯曲来平衡，使表观润湿角偏离刚性基底上的 Young 角，但相对于变形后的固体表面定义的真实接触角仍满足 Young 定律。而在薄膜极限下，弯曲刚度可忽略，基底主要通过面内拉伸响应毛细作用，润湿行为逐渐向液体基底上的 Neumann 构型过渡。然而，该理论建立在小挠度和极限分离等近似之上，未能统一描述弯曲与拉伸的耦合效应，因此主要适用于定性或标度分析，对大变形情形的刻画仍存在局限。Vella 等人^[35]基于无矩薄膜理论对液滴诱导下的薄膜面内拉伸响应进行描述，推导了薄膜润湿问题的平衡方程及边界条件，通过数值方法求解该边界值问题，从而得到了薄膜的非均匀张力场。但其在薄膜接触线关系的处理上没有使用严格的变分结论，对接触角进行了不统一的近似。在此基础上，Nair 等人^[59-60]将分析推广至大变形情形，采用超弹性模型描述薄膜的面内拉伸，并通过有限变形下的几何映射和非线性应变度量刻画液滴诱导的大挠度变形，进而基于能量变分原理求解体系的平衡构型。研究表明，即便忽略弯曲刚度，当变形较大时，膜内张力的空间重分布及其与接触线几何的耦合仍需在几何非线性框架下才能得到合理描述。Liu 等人^[61]进一步将表面弹性纳入薄膜润湿问题的力学描述中，结果表明，考虑表面能的应变依赖时，薄膜接触线处不仅需要满足力的平衡条件，还需满足能量平衡条件；表面弹性参数会影响薄膜局部变形及表观润湿角。

相较于关注具体建模与求解方法，另一些工作从力学极限的角度系统讨论了薄膜

润湿行为在不同主导机制之间的过渡。Hui 等人^[62]将实验现象与解析求解相结合，说明了对于小液滴在高度可变形薄膜上的润湿，弯曲效应只影响接触线附近边界层内的力学行为。此外，Hui 等人^[63]在大变形几何框架下，通过能量最小化统一考虑了界面能与薄膜弹性，从而系统揭示了润湿行为在刚性极限与高度可变形极限之间的连续过渡，如图1.10(a)所示。Kozyreff 等人^[57]通过能量变分方法从更一般的角度系统研究了外部张力如何控制薄片的润湿构型，并给出了润湿构型随预张力和有效黏附能变化的相图，如图1.10(b)所示，其中， T 表示薄膜所承受的拉力， Γ 为可弯曲性参数（表面能 γA 与弯曲刚度 B 的比值）。在这两个参数的共同调节下，薄膜的行为可经历部分润湿、完全润湿及囊泡状态之间的转换。

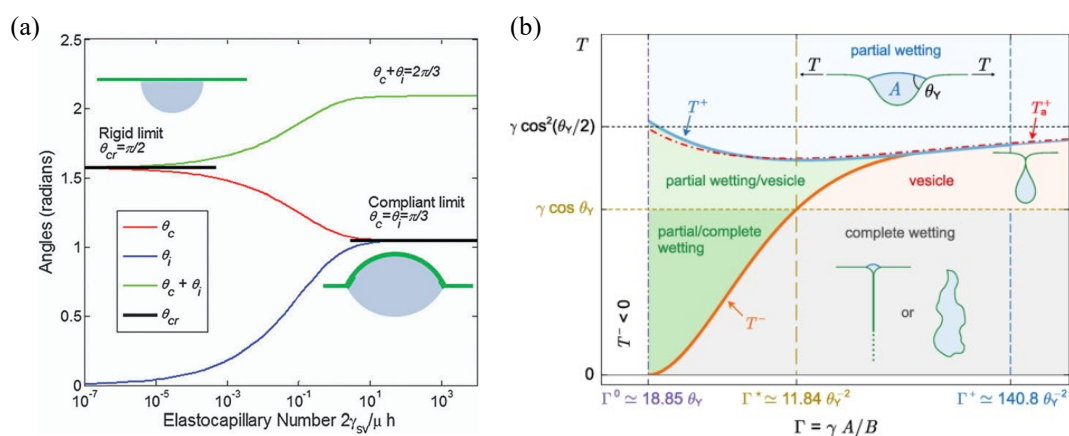


图 1.10 薄膜润湿行为在不同主导机制之间的过渡: (a) 接触角随弹性毛细数的变化关系^[63]; (b) 2D 模型润湿相图^[57]

综上所述，已有研究从几何描述、大变形薄膜理论及力学极限过渡等角度对液滴-薄膜体系进行了广泛探讨。特别地，同时考虑弯曲和拉伸变形时，薄膜变形的几何非线性被纳入分析体系，此时的液滴-薄膜接触可称为非线性润湿。目前尚缺乏对非线性润湿问题的统一分析框架。

1.3 薄膜的弹性毛细效应

弹性毛细效应是指柔性固体或薄膜与液体接触时，液体表面张力能够显著引起固体弯曲或拉伸变形的现象。该效应已在多种固液接触体系的实验中得到验证。例如，液滴可诱导其表面的弹性薄片发生卷曲并最终包裹液滴（图1.11(a)）^[64]；柔性纤维在接触液滴后会自发缠绕（图1.11(b)）^[65]；以及细长头发丝在遇水后由于毛细作用聚集成束（图1.11(c)）^[66]。

上述研究中，弹性毛细长度 $L_{EC} = \gamma/E$ 或弯曲毛细长度 $L_{BC} = \sqrt{B/\gamma}$ 是衡量体系行为的重要特征尺度。当几何尺度大于该长度时，弹性应变能主导固体的力学响应，毛细作用对变形的影响可以忽略；而当研究尺度远小于该特征尺度时，弹性体在液滴诱

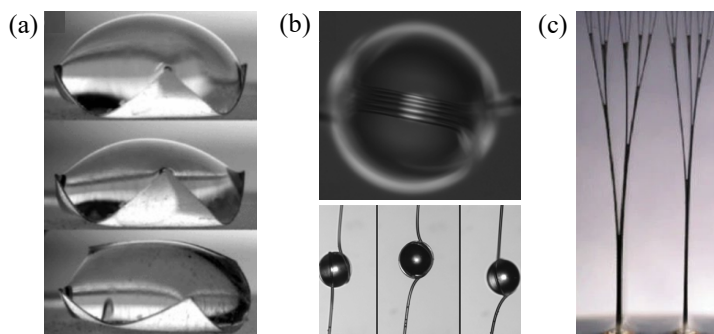


图 1.11 可变形的弹性毛细效应: (a) 液滴诱导的薄膜折叠与包裹变形^[64]; (b) 柔性纤维与液滴接触后的自发缠绕^[65]; (c) 细长头发丝遇水后聚集成束^[66]

导下会发生与经典力学显著不同的行为。虽然上述场景中均涉及固液界面与固气界面，但相关界面张力对力学行为的贡献通常未被显式纳入分析。

针对固体界面张力（包括固液与固气界面）是否应纳入力学分析的问题，Kumar 等人^[67]进行了系统研究。以漂浮于液面的薄膜为对象，他们指出现有文献中存在两种相互矛盾的应力处理方式，如图1.12(a)所示。在图1.12(b)所示的界面剥离实验中，未观察到由固液与固气界面差异所引起的额外曲率变化，这表明界面能并未转化为作用于薄膜的切向应力。因而在宏观尺度下，固体界面能并不决定薄膜的面内应力状态。此外，界面能变化与外部加载的等效类比思想实验证明，固液界面影响主要体现在能量层面，对应于一个极小的预应变。由于该预应变通常难以实验观测，因此在多数实际分析中可忽略不计。基于此，采用图1.12(a)中受力形式 B 的处理方式具有一定合理性。

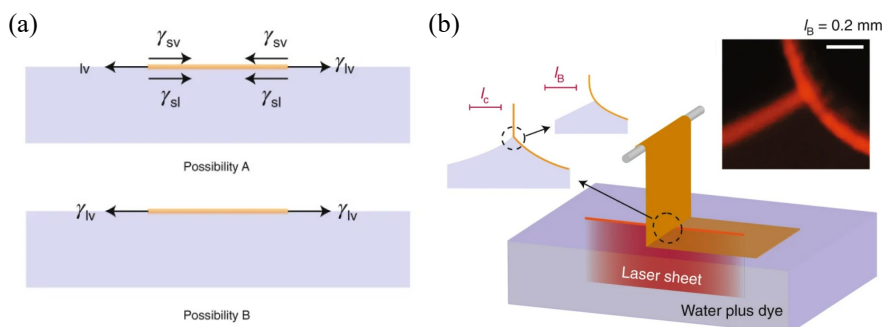


图 1.12 漂浮薄膜的应力分析^[67]: (a) 两种可能的应力分布情况; (b) 悬浮薄膜的液面剥离实验

然而，在特定边界条件或几何构型下，受力形式 A 所包含的固体界面张力对力学平衡的直接作用不可忽略。例如，在鼓泡问题^[68-71]中，二维材料转移至基底后会自发形成纳米气泡，其形貌由薄膜弹性应变能与界面能（包括固气与固固界面）之间的竞争共同决定，界面能差异直接影响气泡的尺寸与稳定性。在纳米开关的研究^[72]中，固液、固气界面张力与薄膜弹性相互作用，使得二维材料在液体作用下发生可逆弯曲与闭合，实现极微量液体的封装。在液滴包裹问题^[73]中，固液界面张力会影响变形动力学，其与弹性的耦合可驱动超薄柔性薄片快速包裹液滴，并决定最终的包裹形貌与密封性能。

上述研究表明，在低维材料或微纳尺度体系中，固体界面张力不再仅作为能量项的修正，而是能够与弹性力协同作用，显著影响体系的力学响应。综上所述，在薄膜弹性毛细效应的研究中，关于固体界面张力是否可以忽略仍存在争议，而对弹性毛细效应的定量表征，尤其是固体界面张力的贡献，仍存在一定困难。

1.4 薄膜的黏附行为

固体与固体接触时，由于范德华力、静电力及化学键等作用，界面通常表现出黏附效应，即分子间作用力使接触表面产生吸引并趋于结合。黏附问题是固固接触力学的核心内容之一。对理想刚体，黏附主要作用为边界约束；随着接触体可变形性增强，弹性变形与界面黏附的竞争共同决定接触区形成与演化。薄膜结构可变形性强且非线性效应显著，界面作用与变形耦合更加突出。在黏附力学领域，块体黏附研究起步较早，理论成熟，许多经典模型与方法源于块体体系。因此，有必要基于块体黏附分析固体黏附研究的基本方法，并在此基础上探讨薄膜黏附的研究策略。

1.4.1 经典块体黏附理论

对可变形体接触的研究最早可以追溯到赫兹理论。赫兹^[74]通过解析方法建立了两光滑弹性体接触时，接触半径、外荷载及几何尺度之间的定量关系

$$a_0 = \left(\frac{3P_0 R^*}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (1.18)$$

其中 R^* 和 E^* 分别是两接触体的等效半径和等效弹性模量。在此基础上，赫兹进一步给出了压入深度及接触区域的压力分布，该弹性接触问题的经典解析解被广泛用于滚动轴承^[75-76]和齿轮啮合^[77-78]等工程接触力分析。由于忽略了界面黏附效应，赫兹理论在微尺度接触、软材料接触以及高表面能体系中难以准确描述实际黏附行为。

为考虑黏附效应，Derjaguin-Muller-Toporov (DMT) 模型^[79]和 Johnson-Kendall-Roberts (JKR) 模型^[80]应运而生。DMT 模型适用于硬材料和小接触区条件下的微观黏附作用，其基本观点是将黏附力视为作用于接触区外的远场作用力，对接触区的几何和弹性解近似采用赫兹解，将远场力的效应叠加到拉伸荷载中以修正接触行为。尽管 DMT 模型能够在某些微观接触情形下给出合理预测，但其对黏附力分布的近似处理限制了其在软材料及高表面能材料中的适用性。

对于软材料、大接触区和高表面能的接触问题，JKR 模型更为适用。JKR 理论来源于轻荷载条件下接触面积依旧存在的实验现象。其理论核心在于通过能量方法将弹性变形成能、机械外力做功及界面黏附能 Γ_{ad} 结合，得到接触半径和临界载荷的平衡条件

$$a^3 = \frac{3R^*}{4E^*} \left[P + 3\pi\Gamma_{ad}R^* + \sqrt{6\pi\Gamma_{ad}R^*P + (3\pi\Gamma_{ad}R^*)^2} \right] \quad (1.19)$$

该公式表明，即使在外荷载 $P = 0$ 时，两弹性体在界面黏附能的作用下也会发生自发接触。这一特点在软橡胶、聚合物和生物材料的接触实验中得到了广泛验证^[81]。此外，方程(1.19)的有效性要求外荷载 P 满足关系

$$P \geq (3\pi\Gamma_{\text{ad}}R^*)/2 \quad (1.20)$$

该关系给出了两块体材料脱粘的最小外力作用，其可称为脱粘力 (pull-off force)。由上式可见，两弹性体接触的脱粘力仅由几何尺度和黏附能决定，不受材料性质等影响。

JKR 理论最初在众多宏观材料黏附实验中得到验证。随着表面力仪 (SFA) 和原子力显微镜 (AFM) 在黏附接触精密测量中的广泛应用，JKR 理论在微观尺度下同样被证实有效。随后，研究者将其推广应用于各种块体材料的接触体系，考虑了固体表面能^[82]、粗糙表面^[83]、非规则固液接触^[84]、瞬态黏附^[85]、含液体软材料^[86] 等因素，分别列于图1.13(a)-(e)。此外，JKR 理论可用于解释壁虎足毛黏附^[87] 等自然现象，并广泛应用于药物颗粒相互作用分析^[88] 和柔性机器人抓取设计^[89] 等领域，分别如图1.13(f)-(h) 所示。在理论发展方面，JKR 理论已扩展至膜基结构^[90-91]、超弹性固体^[92]、动力学问题^[93] 及椭圆形接触^[94] 等多种复杂情形。

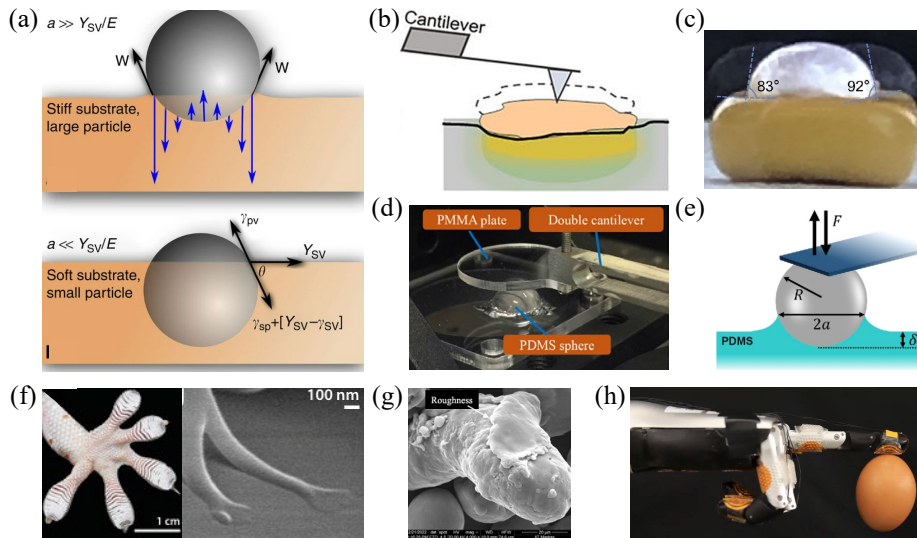


图 1.13 JKR 理论的实验研究与应用：(a) 考虑固体表面能的 JKR 黏附实验^[82]；(b) 具有粗糙表面的细胞群的 JKR 黏附实验^[83]；(c) 非规则固液界面的 JKR 接触^[84]；(d) PDMS 凝胶的瞬态压痕实验^[85]；(e) 胶体探针与软材料 PDMS 间的黏附^[86]；(f) 壁虎足部与基底间的强黏附^[87]；(g) 高比表面积药物颗粒的 JKR 黏附接触模拟^[88]；(h) 机械手在 JKR 模式下的黏附抓取^[89]

此外，JKR 理论体现了 Griffith 断裂理论^[95] 在黏附接触中的应用。Griffith 断裂理论由其在 1921 年提出，强调裂纹扩展由弹性能释放率等于表面能增加率这一条件决定，注重整体能量平衡而非裂尖局部应力奇异性。对应地，JKR 理论通过最小化系统总能量来判断黏附或脱粘行为，同样遵循了能量平衡的原则。

衡条件，从而判断伸长比等物理量在接触线处的连续性。值得注意的是，这与传统块体断裂存在明显差异：在块体裂纹尖端处，能量释放率通常与应力奇异性密切相关。

此外，Griffith 思想也可用于分析更复杂的薄膜黏附接触问题。例如，在图1.15(a)所示的鼓泡实验中，人们发现多层石墨烯薄膜与基底之间的黏附韧性会随石墨烯层数增加而减小^[98]。部分研究从基底粗糙度、薄膜弯曲刚度及界面残余应变能等角度进行了解释，但仍难以完全说明这一现象。为此，Wood 等人^[98]将 Griffith 能量思想引入鼓泡模型，通过分析界面裂纹扩展的能量释放率指出，鼓泡变形过程中产生的层间剪切与滑移会改变开裂模态与剪切模态之间的能量分配，降低断裂模态混合度 G_{II}/G_I ，从而导致黏附韧性随层数变化。其中， G_I 和 G_{II} 分别表示开裂模态与剪切模态的能量释放率。

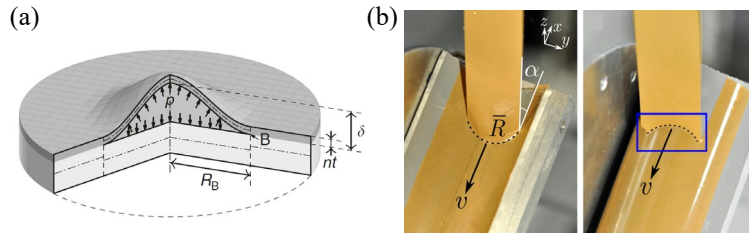


图 1.15 Griffith 思想在复杂黏附接触中的应用：(a) 多层石墨烯鼓泡^[98]；(b) 薄膜曲面剥离^[99]

Griffith 思想还可用于研究几何复杂性极高的曲面撕脱问题。当薄膜从具有曲率的基底上剥离时，基底曲率会改变薄膜的变形方式以及裂纹前沿的局部几何关系，使得裂纹路径不再简单沿直线传播，而可能出现收敛、发散甚至更加复杂的形态，如图1.15(b)所示。Kruglova 等人^[99]对该现象进行了分析，发现虽然裂纹路径会受到复杂几何因素的影响，但其演化仍可以在 Griffith 能量思想框架下得到解释。在撕裂过程中，外力输入的能量在薄膜弹性变形、界面分离以及裂纹扩展等过程之间重新分配，而裂纹路径则倾向于沿着系统能量变化满足 Griffith 条件的方向演化。

本文分析主要基于刚体与悬浮薄膜的接触构型。在该构型下，Borodich 和 Galanov^[100]研究了轴对称压头与二维圆形石墨烯薄膜之间的 JKR 黏附接触问题，如图1.16(a)所示。他们首先建立并求解了 Hertz 型与 Boussinesq 型无黏附接触模型，随后引入 JKR 理论，并基于能量极值条件推导得到黏附情形下非线性的力-位移关系以及力-接触半径关系。在该模型中，薄膜边界受到较大的预张力作用，使得膜内张力场可视为均匀分布。同样考虑均匀张力的薄膜，Argatov^[101]构建了轴对称和非轴对称 JKR 黏附接触模型。在轴对称情形下（如图1.16(b)所示），结合共形接触条件和位移连续条件，通过能量变分得到了力-位移关系的解析解，并由此确定了接触线的位置；在非轴对称情形下，结合接触边界的几何关系及 Griffith 能量平衡条件，通过对接触边界进行扰动分析确定其位置，并在整个薄膜域积分得到总接触力。Yang 等人^[102]研究了充气薄膜与刚性球体之间的黏附接触问题，如图1.16(c)所示。其分析包括薄膜在均匀气压

作用下的自由膨胀，与刚性球体的无黏附接触，以及黏附作用下的界面剥离三个阶段。模型考虑了薄膜大变形，并据此简化控制方程以获得解析解；在界面脱粘判据上，直接采用了薄膜从平面基底剥离时的能量释放率。

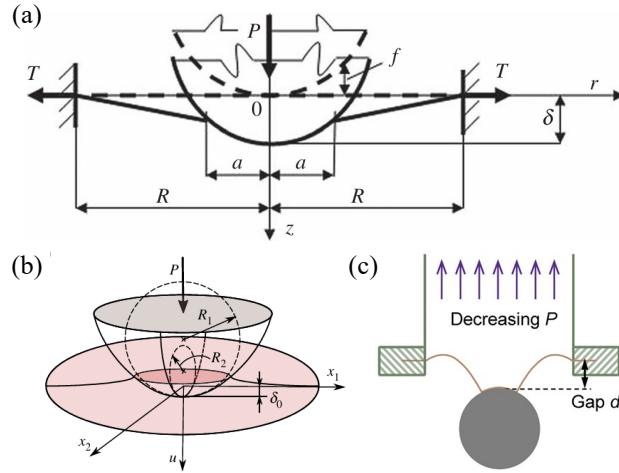


图 1.16 悬浮薄膜与刚体的黏附接触：(a) 轴对称压头与二维圆形石墨烯薄膜之间的黏附接触^[100]；(b) 椭圆抛物面形状的刚性压头与圆形薄膜之间的黏附接触^[101]；(c) 充气薄膜与刚性球体之间的黏附接触^[102]

通过对经典块体黏附理论及薄膜黏附问题的回顾可以看出，能量方法能够有效描述薄膜在黏附接触中的非线性变形，并可通过变分原理自洽地给出接触线处的边界条件，为分析黏附与脱粘行为提供统一框架。然而，在悬浮薄膜与刚性球体接触这一典型体系中，现有研究多依赖小变形假设或特定近似，难以同时准确刻画几何非线性、材料非线性及脱粘过程中的力学响应。因此，有必要借助严格的能量变分方法，系统考虑该体系中薄膜的几何非线性与材料非线性，从而对其黏附行为进行更加精确的刻画。进一步地，结合前文对润湿与黏附问题的分析可以看出，当前针对薄膜与不同介质接触过程的研究尚缺乏一致性的变分描述框架，这也是本文所关注的核心问题之一。

1.5 本文研究内容

综上所述，薄膜在真实应用场景下表现出非线性变形与表界面效应共同主导的复杂耦合行为，构成了薄膜力学研究中一个重要且值得深入探索的方向。尽管相关研究已取得丰富进展，但在弹性薄膜非线性润湿行为的真实刻画、薄膜弹性毛细效应的定量表征、非线性薄膜黏附行为的精确描述，以及考虑表面弹性效应的一致性变分框架等方面，仍存在若干具有挑战性的问题。因此，本文聚焦于弹性薄膜与不同介质接触的表界面力学行为，结合能量变分方法与非线性力学分析，系统讨论了薄膜的润湿、压痕、黏附及表面弹性效应等表界面力学问题，揭示了薄膜在弹性与表界面耦合作用下的非线性力学响应机制，如图1.17所示。本文具体内容如下：

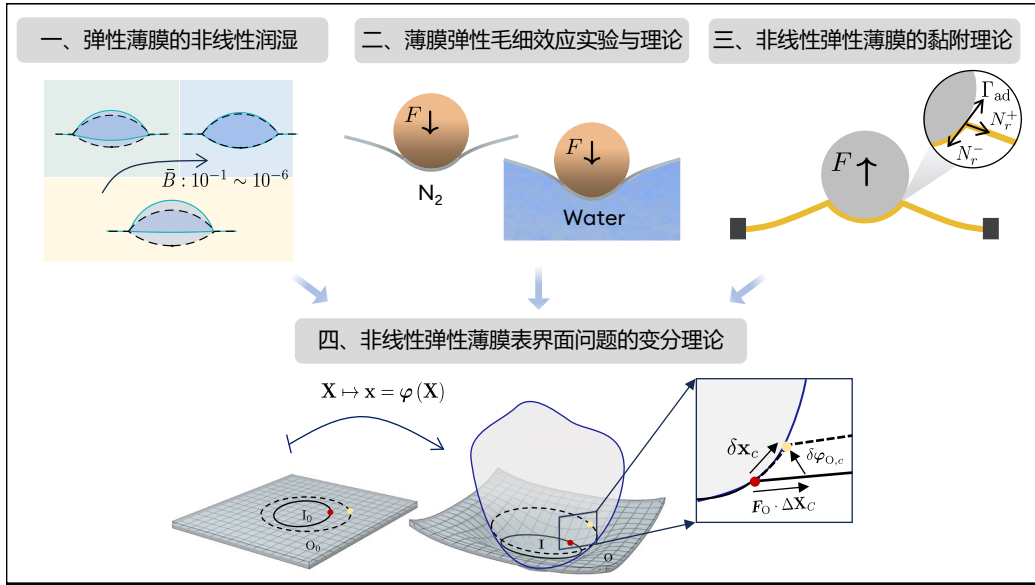


图 1.17 本文主要研究内容

第一章：绪论。本章系统梳理了非线性弹性薄膜表界面力学的研究背景和意义，重点阐述了薄膜非线性力学理论、表界面效应、薄膜润湿、薄膜黏附接触等关键问题的研究现状。结合已有研究的不足，引出了本文的研究内容。

第二章：弹性薄膜的非线性润湿。本章从 FvK 理论的变形描述出发，构建了无柄液滴在悬浮薄膜上静态平衡时体系的总自由能泛函，涵盖薄膜的弯曲能、拉伸能以及体系各界面的表面能。结合 FvK 理论框架下的几何标度与能量标度进行量纲分析，推导出薄膜在液滴毛细作用下的等效弯曲长度标度与特征挠度。将力学特征尺度与润湿长度尺度进行比较，提出了表征薄膜可弯曲性与可变形性的无量纲参数，并据此划分了液滴在薄膜上的润湿平衡构型的参数区间。最后，结合初边值问题的数值计算，讨论了弯曲作用、尺寸效应等对润湿平衡构型的影响机制。本章所建立的模型为理解柔性界面润湿行为及设计可控薄膜表面提供了理论基础。

第三章：薄膜弹性毛细效应实验与理论。本章设计并实施了不同介质-薄膜界面的压痕实验，边界受控的薄膜在外力作用下发生面外变形，通过比较固液界面与固气界面的面外变形差异，实现了弹性毛细效应的定量表征。在无矩薄膜的变形描述下，建立了考虑表面张力的压痕理论模型，详细分析了薄膜与压头之间的界面黏附，以及非接触区域表面张力对压痕力学响应的影响。结合实验条件，通过改变薄膜总张力和拉伸刚度对压痕曲线进行拟合，得到了水-石墨烯界面与氮气-石墨烯界面的表面能差值，分析了单层悬浮石墨烯的本征润湿性。在此基础上，理论方面，进一步对薄膜下陷效应及弯曲刚度的影响进行了讨论；实验方面，还进行了弹性毛细效应的鼓泡实验表征。本章提供了一种通过面外变形实验定量表征薄膜材料弹性毛细效应的策略。

第四章：非线性弹性薄膜的黏附理论。本章系统分析了轴对称悬浮薄膜与刚性球体

的黏附接触问题。针对肥皂薄膜，解析求解了最小曲面方程以得到薄膜变形轮廓，定义了肥皂薄膜与刚性球体接触的界面黏附，从而建立了肥皂薄膜拉脱力与变形的关系。针对无矩薄膜，通过总势能最小化方法推导了薄膜的平衡方程与能量释放率，结合 Griffith 能量准则给出了接触线处的界面稳定条件，对体系进行了数值求解，并重点讨论了共形接触的几何非线性对脱粘力的影响。针对超弹性薄膜，在大变形框架下，通过总势能最小化推导了平衡方程和能量释放率，分析了薄膜尺寸、预拉伸等因素对其脱粘行为的调控作用，在此基础上，通过总自由能泛函引入表面张力，讨论了其对能量释放率和脱粘行为的影响。结果表明，三类典型薄膜体系中均存在仅依赖于界面黏附与球体尺寸的稳定脱粘力。本章研究将块体材料的经典黏附理论拓展到薄膜体系，为理解柔性界面黏附力学提供了理论基础。

第五章：非线性弹性薄膜表界面问题的变分理论。本章在薄膜接触问题中引入表面弹性的影响，基于动边界变分原理，建立了非线性弹性薄膜表界面问题的一致性变分框架。首先，从概念出发，阐述了包含可动边界的固体接触体系变分原理，包括材料变形对应的场变分及积分域变化对应的几何变分。以任意形状悬浮薄膜与刚体的接触为例，进行了严格的变分分析，推导出薄膜变形的平衡方程及接触线处的自然边界条件。其中，接触线的能量平衡条件可视为块体材料 Eshelby 构型力守恒与 Griffith 断裂判据在二维薄膜界面问题中的推广。由于平衡条件可归结为总能量对构型扰动的一阶变分为零，该理论还可自然推广至含固液界面的接触问题。最后，讨论了表面弹性在薄膜-球体接触问题中对力-位移曲线及脱粘力的调控作用，并提出了基于预拉伸大变形的非稳定脱粘力理论预测公式，为薄膜表面弹性定量表征提供了一种理论方法。

第六章：结论与展望。本章总结了全文的主要研究成果，并对未来的研究方向进行了展望。

第二章 弹性薄膜的非线性润湿

2.1 引言

液滴在可变形体上的润湿是一个典型的多尺度耦合问题。对于表面张力为 γ 的液体与弹性模量为 E 的软固体之间的接触，弹性毛细长度 γ/E 将毛细主导的小尺度与弹性主导的大尺度区分开来^[103-105]。若接触线附近界面作用的典型长度为 a ^[49,54]，液滴尺寸为 R ，当 $\gamma/E \ll a$ 时，基底近似刚性，液滴形状满足经典润湿理论，如图2.1(a)中的情况 i；而 $a \ll \gamma/E \ll R$ 时，接触线处会形成润湿脊^[106-107]，体现出界面张力对软基底的显著牵引作用，如图2.1(a)中的情况 ii；当弹性进一步减弱至 $\gamma/E \gg R$ 时，液滴趋于透镜形态，弹性对整体形状的约束几乎可以忽略^[108-109]，如图2.1(a)中的情况 iii。

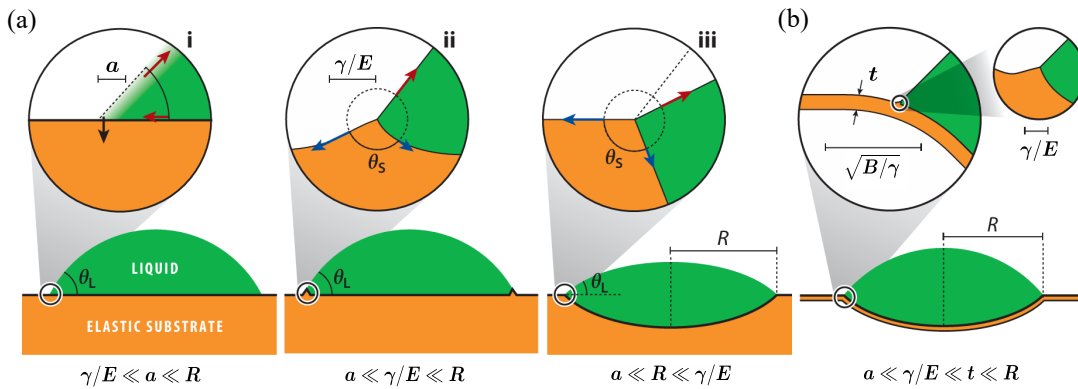


图 2.1 液滴在可变形体上的润湿^[105]：(a) 液滴在软固体上的润湿；(b) 液滴在薄膜上的润湿

当基底为厚度 $t \ll R$ 的薄膜时，由于弯曲刚度 $B \sim Et^3$ 的引入，问题进一步复杂化。 $\gamma/E \ll t$ 的条件下，润湿脊成为次要效应，液滴的毛细力不仅在接触线附近产生局部变形，还会在更大尺度上诱导薄膜发生整体弯曲甚至拉伸^[110-111]。因此，液滴-薄膜体系中同时存在表界面张力、弯曲刚度与面内拉伸等多种物理机制的竞争与耦合，其主导行为取决于液滴尺寸 R 、薄膜厚度 t 、材料模量 E 以及表面张力 γ 等参数之间的相对尺度关系，不能直接通过软固体润湿的相关结论描述。

上述跨尺度的弹性毛细耦合行为构成了薄膜润湿问题的研究核心。目前有关研究提出了一系列无量纲参数，用以统一各物理机制的特征长度和应力尺度，如表2.1所示。由该表可见，现有研究通常以薄膜的拉伸刚度 $Y = Et$ 定义的弹性毛细长度 $l_{EC} = \gamma/Y$ 和自然的弯曲毛细长度 $l_{BC} = \sqrt{B/\gamma}$ 为基础，结合液滴尺寸（半径 R 或接触面积 A ）与应力尺度讨论薄膜的拉伸与弯曲响应；此外，预张力 T 或总张力 T_{tot} 作用亦常被纳入分析框架。然而，这些参数往往基于特定的主导机制构建，例如仅比较拉伸效应与毛细作用^[104,111]，或依赖于一定的条件，例如将薄膜张力视为常数^[57]。目前尚缺乏在统一理

论描述下对薄膜变形与应力场的系统刻画。

表 2.1 薄膜润湿无量纲参数

物理机制	无量纲参数
可拉伸性	γ/Y ^[104,111] $\gamma R^2/B$ ^[103-104,110-111]
可弯曲性	$2A(T - \gamma \cos \theta_Y)/B$ ^[57] $T_{\text{tot}} R^2/B$ ^[56,62,112]
预张力效应	T/γ ^[104]
尺寸效应	R/R_f ^[104]

本章考虑 FvK 框架下的薄膜弯曲与拉伸变形，对轴对称液滴-薄膜润湿接触中的非线性力学响应，即薄膜的非线性润湿行为进行详细描述。主要内容安排如下：第 2 节对毛细作用下的 FvK 薄膜润湿问题进行分析，考虑其弯曲、拉伸及各界面的表面能，基于能量变分方法推导完整的平衡方程与边界条件，并对该多点边界值问题进行数值求解；此外，给出弯曲刚度可忽略时，无矩薄膜极限的对应理论与数值解答；第 3 节通过能量平衡分析与应力尺度给出液滴-薄膜润湿体系的可变形性无量纲数与可弯曲性无量纲数；第 4 节基于数值计算结果，讨论无量纲拉伸刚度、弯曲刚度等物理参量对润湿平衡构型的影响；第 5 节讨论液滴重力作用对润湿体系的影响。第 6 节对本章内容进行总结。

2.2 毛细作用下的薄膜非线性润湿模型

2.2.1 总自由能及能量变分

基于图 2.2(a) 所示的真实实验场景构建轴对称液滴-薄膜接触模型，如图 2.2(b) 所示。薄膜的固定端半径与液滴接触半径分别表示为 R_f 和 r_c ，以薄膜的固定端高度及对称中心为原点，薄膜和液滴的面外变形分别为 z 和 z_d ，在接触线处，液气界面的转角为 θ_d ，接触线内外两侧薄膜转角分别为 θ^- 和 θ^+ 。

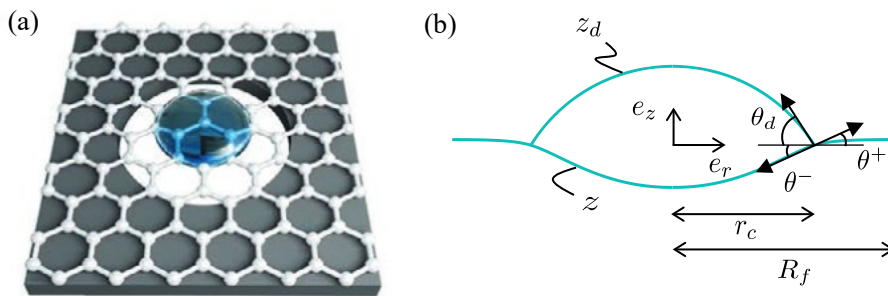


图 2.2 液滴-薄膜润湿接触：(a) 轴对称悬浮薄膜润湿实验^[113]；(b) 轴对称液滴-薄膜润湿模型

能量原理（或称变分原理）是求解该问题最有效的方法，其可推导出系统各界面所对应的平衡方程及边界条件。考虑液滴体积较小的情况，此时液滴重力作用可忽略，变形完全由液滴毛细作用驱动。薄膜的弯曲刚度和拉伸刚度共同参与变形平衡，此外，还需考虑各界面的表面能。由此可列出润湿体系的总自由能表达式

$$\Pi = \Pi_{\text{bend}} + \Pi_{\text{stretch}} + \Pi_{\text{surf}} + p \left[\int_0^{r_c} 2\pi r (z_d - z) dr - V_{\text{droplet}} \right] \quad (2.1)$$

上式中， p 为 Lagrange 乘子，其所在项约束了液滴体积守恒条件。 Π_{bend} 和 Π_{stretch} 是薄膜中储存的弯曲能量和拉伸能量，基于线弹性本构和小变形假设，二者可分别计算为

$$\Pi_{\text{bend}} = 2\pi B \int_0^{R_f} \frac{1}{2} \left(z''^2 + \frac{z'^2}{r^2} + \frac{2}{r} \nu z' z'' \right) r dr \quad (2.2)$$

以及

$$\Pi_{\text{stretch}} = 2\pi \int_0^{R_f} \frac{1}{2} (N_r \varepsilon_r + N_\theta \varepsilon_\theta) r dr \quad (2.3)$$

上式中， $z' = dz/dr$ ， ν 为薄膜的泊松比， B 为薄膜的弯曲刚度。 ε_r 和 ε_θ 分别是薄膜径向和环向应变，根据薄板中面运动学关系，其可通过面内变形 u 和面外变形 z 计算

$$\varepsilon_r = u' + \frac{1}{2}(z')^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2.4)$$

根据胡克定律，径向和环向薄膜张力分别为

$$N_r = \frac{Y}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \quad N_\theta = \frac{Y}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \quad (2.5)$$

其中 Y 为面内拉伸刚度，由薄膜的杨氏模量与厚度的乘积给出。

Π_{surf} 为系统的界面能，其可计算为常数界面能密度与界面面积的乘积

$$\Pi_{\text{surf}} = \int_0^{r_c} \gamma_d \sqrt{1+z_d'^2} 2\pi r dr + \int_0^{r_c} (\gamma_{sv} + \gamma_{sl}) \sqrt{1+z'^2} 2\pi r dr + \int_{r_c}^{R_f} 2\gamma_{sv} \sqrt{1+z'^2} 2\pi r dr \quad (2.6)$$

上式中， γ_d ， γ_{sv} 和 γ_{sl} 分别为液滴自由表面，薄膜-空气接触界面，及薄膜-液滴接触界面的界面能密度。

在润湿模型中，接触线位置由液滴毛细作用和薄膜弹性作用之间的能量竞争关系决定，因此体系的平衡状态由可动边界条件 $\delta r_c \neq 0$ 及能量最小化条件 $\delta \Pi = 0$ 共同确定，自由能变分的基本形式为

$$\delta \Pi = 2\pi \delta \int_0^{r_c^-} L_1 dr + 2\pi \delta \int_{r_c^+}^{R_f} L_2 dr \quad (2.7)$$

其中， L_1 与 L_2 分别为接触区域和非接触区域的加权能量密度，其表示各区域能量密度与轴对称积分权重 r 的乘积，具体地，对于接触区域和非接触区域，分别有

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{Et}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu \varepsilon_r \varepsilon_\theta) r + \frac{B}{2} \left(\frac{z'^2}{r^2} + z''^2 + 2\nu \frac{z'}{r} z'' \right) r \\ & + \gamma_d \sqrt{1+z_d'^2} r + (\gamma_{sv} + \gamma_{sl}) \sqrt{1+z'^2} r + p(z_d - z)r \end{aligned} \quad (2.8)$$

以及

$$L_2 = \frac{Et}{2(1-\nu^2)}(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_\theta)r + \frac{B}{2}\left(\frac{z'^2}{r^2} + z''^2 + 2\nu\frac{z'}{r}z''\right)r + 2\gamma_{sv}\sqrt{1+z'^2}r \quad (2.9)$$

本小节在 Shanahan^[58] 所提出的润湿问题能量变分计算式基础上，加入薄膜面内拉伸变形 $u(r)$ 的变分，从而得到统一考虑体系面外变形 $z(r)$ ， $z_d(r)$ 及薄膜的面内拉伸变形 $u(r)$ 的能量变分具体计算式

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Pi}{2\pi} = & \int_0^{r_c^-} \left[\frac{\partial L_1}{\partial z} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_1}{\partial z'} \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\partial L_1}{\partial z''} \right) \right] \delta z dr \\ & + \int_0^{r_c^-} \left[\frac{\partial L_1}{\partial u} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_1}{\partial u'} \right) \right] \delta u dr + \int_0^{r_c^-} \left[\frac{\partial L_1}{\partial z_d} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_1}{\partial z'_d} \right) \right] \delta z_d dr \\ & + \int_{r_c^+}^{R_f} \left[\frac{\partial L_2}{\partial z} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial z'} \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial z''} \right) \right] \delta z dr \\ & + \int_{r_c^+}^{R_f} \left[\frac{\partial L_2}{\partial u} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial u'} \right) \right] \delta u dr \\ & + \left[\frac{\partial L_1}{\partial z'} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_1}{\partial z''} \right) \right] \Big|_{r=r_c^-} \delta z^- + \frac{\partial L_1}{\partial z''} \Big|_{r=r_c^-} \delta z'^- \\ & + \frac{\partial L_1}{\partial z'_d} \Big|_{r=r_c^-} \delta z_d^- + \frac{\partial L_1}{\partial u'} \Big|_{r=r_c^-} \delta u^- \\ & - \left[\frac{\partial L_2}{\partial z'} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial z''} \right) \right] \Big|_{r=r_c^+} \delta z^+ - \frac{\partial L_2}{\partial z''} \Big|_{r=r_c^+} \delta z'^+ \\ & - \frac{\partial L_2}{\partial u'} \Big|_{r=r_c^+} \delta u^+ \\ & \left\{ L_1 - z' \left[\frac{\partial L_1}{\partial z'} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_1}{\partial z''} \right) \right] \Big|_{r=r_c^-} - z'' \frac{\partial L_1}{\partial z''} \Big|_{r=r_c^-} - z'_d \frac{\partial L_1}{\partial z'_d} - u' \frac{\partial L_1}{\partial u'} \Big|_{r=r_c^-} \right. \\ & \left. - L_2 + z' \left[\frac{\partial L_2}{\partial z'} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial z''} \right) \right] \Big|_{r=r_c^+} + z'' \frac{\partial L_2}{\partial z''} \Big|_{r=r_c^+} + u' \frac{\partial L_2}{\partial u'} \Big|_{r=r_c^+} \right\} \delta r_c \quad (2.10) \end{aligned}$$

上式中，上标 $-/+$ 表示接触线左侧或右侧的物理量，如 $z^- = z(r_c^-)$ ， δz^- 表示对该值的变分，而不是函数变分 δz 在接触线左侧的值。方程(2.10)前四行包含五个面积域积分，得到五个 Euler-Lagrange 方程，分别对应接触区域薄膜的面外和面内平衡方程，液滴的 Laplace 方程，以及非接触区域薄膜的面外和面内平衡方程；其余变分项对应体系的边界条件。接下来，根据薄膜接触问题的具体能量形式给出变分推导的结果，并基于这些结果对润湿模型进行完整的力学描述。

2.2.2 控制方程与边界条件

首先，对于液滴自由表面，令 $\delta z_d \neq 0$ 得到其变形的 Laplace 方程

$$\gamma_d \left[\frac{z'_d}{r(1+z_d'^2)^{1/2}} + \frac{z''_d}{(1+z_d'^2)^{3/2}} \right] = p \quad (2.11)$$

上式中，中括号内的两项为液滴变形轮廓的主曲率，反映了液滴自由表面的非线性变形。由该式可见，约束乘子 p 在物理上表示液滴内部的均匀压力。对于薄膜变形，其面外变形的变分 $\delta z \neq 0$ 对应面外平衡方程，考虑接触区域和非接触区域的界面及荷载差异，整个薄膜域上的面外平衡方程可统一表示为

$$B\nabla^2\nabla^2 z - N_r \kappa_r - N_\theta \kappa_\theta - \gamma(r)(\kappa_r + \kappa_\theta) - p(r) = 0 \quad (2.12)$$

上式中，弯曲变形项采用轴对称坐标下的 Laplace 算子，其形式为 $\nabla^2 f = d^2 f/dr^2 + r^{-1}df/dr$ ；拉伸项和表面张力项中， $\kappa_r = d^2 z/dr^2$ 和 $\kappa_\theta = r^{-1}dz/dr$ 分别表示薄膜变形的径向曲率和环向曲率。 $\gamma(r)$ 为薄膜的界面能密度函数，可分区域表示为

$$\gamma(r) = \begin{cases} \gamma_{sl} + \gamma_{sv} & r < r_c \\ 2\gamma_{sv} & r_c < r < R_f \end{cases} \quad (2.13)$$

在不考虑重力的情况下，液滴近似为球形，其在薄膜上施加的均匀压力可通过 Laplace 方程(2.11)计算，因此有

$$p(r) = \begin{cases} \frac{2\gamma_d \sin \theta_d}{r_c} & r < r_c \\ 0 & r_c < r < R_f \end{cases} \quad (2.14)$$

此外，薄膜面内变形的变分 $\delta u \neq 0$ 对应其面内平衡方程

$$\frac{d}{dr} N_r + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0 \quad (2.15)$$

由该方程可见，薄膜的面内平衡由拉伸张力主导，且在接触区域和非接触区域形式相同。这是由于本章所讨论的润湿模型侧重于对体系各部分能量的全面考虑，采用了常数形式的表面能密度；而在一些侧重于讨论固体表面弹性的大变形润湿问题中，表面能密度往往与拉伸能密度一样具有应变依赖性，从而在面内平衡方程中引入表面张力^[61]。

为求解方便，可引入应力函数 Φ ，薄膜弹性张力可以通过应力函数表示为

$$N_r = \frac{\Phi}{r}, \quad N_\theta = \frac{d\Phi}{dr} \quad (2.16)$$

通过应力函数，面内平衡方程(2.15)可自动满足，而面外平衡方程(2.12)可改写为

$$B\nabla^2\nabla^2 z - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\Phi z') - \gamma(r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r z') - p(r) = 0 \quad (2.17)$$

为保证应力函数对应的薄膜张力与变形相协调，应力函数还需满足相容方程

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Phi) \right] = -\frac{Y}{2} (z')^2 \quad (2.18)$$

方程(2.17)和(2.18)共同构成体系的控制方程。

能量最小化条件 $\delta \Pi = 0$ 的其他项构成体系的边界条件。具体地，根据薄膜变形的自然边界条件，接触线两侧面内变形连续，即 $u^- = u^+ = u_c$ ， u_c 为接触线处的面内拉伸

变形。将对应变分 $\delta u^- = \delta u^+ \neq 0$ 代入方程(2.10)，得到薄膜径向张力的连续性条件

$$N_r^- = N_r^+ \quad (2.19)$$

结合方程(2.19)及(2.5)可知，接触线处的径向张力及环向张力均连续，通过应力函数求解时，这两个条件分别对应

$$\Phi^- = \Phi^+, \quad \Phi'^- = \Phi'^+ \quad (2.20)$$

考虑弯曲刚度的情况下，薄膜在接触线处的变形具有连续性和非奇异性，即 $z^- = z^+ = z_c$ 且 $z'^- = z'^+ = z'_c$ 。基于此，通过接触线转角的变分 $\delta z'_c$ 得到接触线处二阶变形的连续性条件 $z''^- = z''^+$ 。除上述自然和连续性边界条件之外，接触线面外位移的变分 δz_c 对应接触线处垂直方向平衡条件

$$\gamma_d \sin \theta_d + (\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) \sin \theta + B(z'''^- - z'''^+) = 0 \quad (2.21)$$

而接触线位置的变分 δr_c 对应接触线处水平方向平衡条件

$$\gamma_d \cos \theta_d - (\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) \cos \theta + Bz'_c(z'''^- - z'''^+) = 0 \quad (2.22)$$

上式中， θ 表示薄膜在接触线处的变形角，有 $\theta^- = \theta^+ = \theta$ 。由方程(2.21)和(2.22)可知，在小变形的框架下，同时考虑薄膜的拉伸、弯曲以及各界面表面张力时，接触线处表面张力的非对称性对应于剪力平衡条件，由于变形的连续性，拉伸张力并未在此情况下参与接触线处力的平衡。

而当薄膜厚度逐渐减小时，相较于拉伸刚度 $Y = Et$ ，弯曲刚度 $B = Et^3/[12(1 - \nu^2)]$ 会更快衰减，系统的总自由能中弯曲应变能 Π_{bend} 项可在渐近意义下忽略，此时能量变分仍可通过(2.10)计算，计算式中对挠度的高阶导数被自然略去，从而得到对应于无矩薄膜极限的控制方程和边界条件。具体地，在拉伸和表面张力作用下，通过应力函数 Φ 表示的薄膜面外平衡方程为

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\Phi z') + \gamma(r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r z') + p(r) = 0 \quad (2.23)$$

式中应力函数 Φ 仍需满足(2.18)所示的相容方程。对于无矩薄膜极限，接触线处变形不再满足高阶连续性条件，仅有面外变形连续性条件 $z^- = z^+$ 及面内变形连续性条件 $u^- = u^+$ 。基于这两个条件，仍可推导出径向张力及环向张力的连续性条件，而接触线处垂直方向的平衡条件则改写为

$$\gamma_d \sin \theta_d + \sin \theta^+ (2\gamma_{sv} + N_r^+) = \sin \theta^- (\gamma_{sl} + \gamma_{sv} + N_r^-) \quad (2.24)$$

与之类似，接触线位置的变分 δr_c 对应接触线处水平方向的平衡条件

$$\gamma_d \cos \theta_d + \cos \theta^- (\gamma_{sl} + \gamma_{sv} + N_r^-) = \cos \theta^+ (2\gamma_{sv} + N_r^+) \quad (2.25)$$

以上两式表明，在弯曲刚度可以忽略时，薄膜润湿接触线处满足 Neumann 张力平衡条

件，且薄膜张力包括固体界面的表面张力与拉伸张力。

2.2.3 无量纲化与数值求解

上述能量分析得到了液滴-薄膜接触体系的控制方程和自然边界条件。本小节对体系进行无量纲化处理，并给出该边界值问题的数值求解策略。由于液滴的表面张力 γ_d 是目前分析框架下唯一的变形驱动作用，而薄膜固定端半径 R_f 可以通过实验条件确定，通过这两个物理量对体系进行无量纲化：

$$\rho = \frac{r}{R_f}, \quad \zeta = \frac{z}{R_f}, \quad \bar{\gamma}_{sl} = \frac{\gamma_{sl}}{\gamma_d}, \quad \bar{\gamma}_{sv} = \frac{\gamma_{sv}}{\gamma_d}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\gamma_d}, \quad \bar{Y} = \frac{Y}{\gamma_d}, \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{\gamma_d R_f}, \quad \bar{p} = \frac{p R_f}{\gamma_d} \quad (2.26)$$

其中 T 为薄膜固定端 R_f 处的预张力。接下来，基于无量纲体系给出薄膜润湿边界值问题的数值求解框架。首先对考虑弯曲刚度的 FvK 薄膜进行分析，对应无量纲化的面外平衡方程为

$$\bar{B}(\zeta'''' + 2\frac{\zeta''''}{\rho} - \frac{\zeta''}{\rho^2} + \frac{\zeta'}{\rho^3}) - \bar{\gamma}(\rho)\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\zeta') - \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\bar{\Phi}\zeta') - \bar{p}(\rho) = 0 \quad (2.27)$$

上式中， $\bar{B} = B/(\gamma_d R_f^2)$ 是无量纲化的弯曲刚度。经无量纲化处理的相容方程为

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\bar{\Phi})\right] = -\frac{\bar{Y}}{2}(\zeta')^2 \quad (2.28)$$

具体的求解中，方程(2.27)和(2.28)均包含接触区域 $(0, \rho_c)$ 及非接触区域 $(\rho_c, 1)$ 两部分，因此体系控制方程包括两个四阶方程和两个二阶方程，共需要 12 个边界条件以求解，其包括：

(i) 对称中心 $\rho = 0$ 处的自然和对称边界条件

$$\zeta'(0) = 0, \quad \zeta'''(0) = 0, \quad \bar{\Phi}(0) = 0 \quad (2.29)$$

(ii) 远端 $\rho = 1$ 处的固定边界条件

$$\zeta(1) = 0, \quad \zeta'(1) = 0, \quad \bar{\Phi}'(1) - \nu\bar{\Phi}(1) = (1 - \nu)\bar{T} \quad (2.30)$$

(iii) 接触线 $\rho = \rho_c$ 处的连续性条件

$$\zeta^- = \zeta^+, \quad \zeta'^- = \zeta'^+, \quad \zeta''^- = \zeta''^+, \quad \bar{\Phi}^- = \bar{\Phi}^+, \quad \bar{\Phi}'^- = \bar{\Phi}'^+ \quad (2.31)$$

以及力的平衡条件

$$\sin\theta_d + (\bar{\gamma}_{sv} - \bar{\gamma}_{sl})\sin\theta + \bar{B}(\zeta''''^- - \zeta''''^+) = 0 \quad (2.32)$$

$$\cos\theta_d - (\bar{\gamma}_{sv} - \bar{\gamma}_{sl})\cos\theta + \bar{B}\zeta_c'(\zeta''''^- - \zeta''''^+) = 0 \quad (2.33)$$

上式中，无量纲化的横向张力平衡条件用于未知参量 θ_d 的求解，此外，对未知接触线位置 r_c 的求解还需用到体积守恒条件。方程(2.27)-(2.33)构成完整闭合的求解体系，用以求解同时考虑弯曲、拉伸、表面张力及预张力的薄膜在液滴作用下的变形平衡。

而在无矩薄膜极限下，对应的无量纲化面外平衡方程简化为

$$\bar{\gamma}(\rho) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \zeta') + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\bar{\Phi} \zeta') + \bar{p}(\rho) = 0 \quad (2.34)$$

求解所需要的边界条件包括：

(i) 轴对称条件

$$\zeta'(0) = 0, \Phi(0) = 0 \quad (2.35)$$

(ii) 固定端条件

$$\zeta(1) = 0, \bar{\Phi}'(1) - \nu \bar{\Phi}(1) = (1 - \nu) \bar{T} \quad (2.36)$$

(iii) 接触线条件

$$\zeta^- = \zeta^+, \bar{\Phi}^- = \bar{\Phi}^+, \bar{\Phi}'^- = \bar{\Phi}'^+ \quad (2.37)$$

$$\sin \theta_d + \sin \theta^+ (2\bar{\gamma}_{sv} + \bar{N}_r^+) = \sin \theta^- (\bar{\gamma}_{sl} + \bar{\gamma}_{sv} + \bar{N}_r^-) \quad (2.38)$$

$$\cos \theta_d + \cos \theta^- (\bar{\gamma}_{sl} + \bar{\gamma}_{sv} + \bar{N}_r^-) = \cos \theta^+ (2\bar{\gamma}_{sv} + \bar{N}_r^+) \quad (2.39)$$

上式中， $\bar{N}_r = N_r/\gamma_d$ 为无量纲化的径向拉伸张力。

上述方程(2.34)-(2.39)构成无矩薄膜极限的完整求解体系。通过 MATLAB 的 `bvp5c` 工具箱分别对上述两种情况进行求解。具体地，在 FvK 薄膜理论和无矩薄膜极限下，液滴润湿模型均属于多点边界值问题。尽管 `bvp5c` 可直接求解这类问题，但在润湿体系中，液滴的接触线位置及接触角均为未知量，因此需要通过牛顿迭代法同时求解这两个未知参数。

2.3 薄膜可变形性与可弯曲性无量纲参数

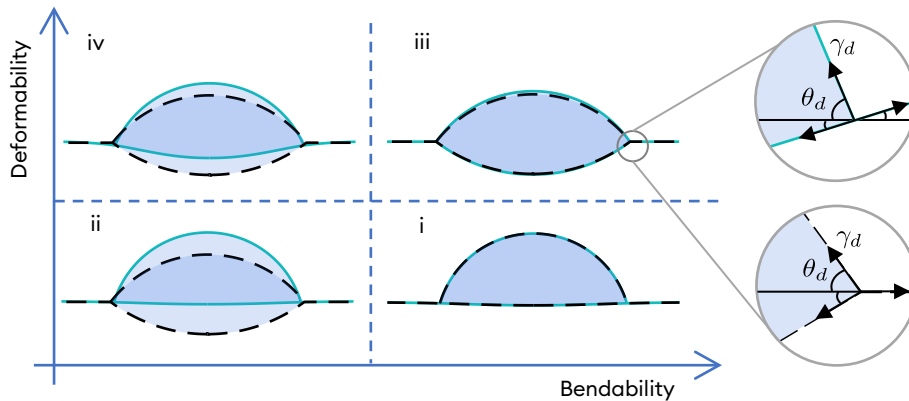


图 2.3 轴对称薄膜体系润湿相图：彩色实线和黑色虚线分别对应 FvK 薄膜理论与无矩薄膜极限的润湿变形轮廓解答。局部放大图比较了宏观上弯曲刚度可忽略时，接触线附近 FvK 薄膜理论与无矩薄膜极限在变形求解中的不同表现

在液滴薄膜润湿体系中，预张力、弯曲刚度、拉伸刚度以及薄膜尺寸等因素均有可

能引起润湿体系平衡形态的变化。对于厚度较小的薄膜，当其弹性模量较大或承受较大预张力时，液滴的毛细作用难以驱动薄膜产生明显变形，此时润湿构型可近似为刚性基底的情形，如图2.3中的 i 所示。另一方面，当薄膜材料本身较软但厚度较大，或对于仿生夹芯结构^[114-115]、机械超材料^[116-117]等具有特殊弯曲刚度的结构，在一定的参数范围内，弯曲效应会使薄膜在宏观上呈现出近乎不可变形的特征，此时无矩薄膜理论将不再适用，如图2.3ii 所示。上述两种情形分别对应薄膜在宏观尺度上近似不可变形的两类情况。对于足够薄的薄膜，弯曲效应在宏观上可忽略，薄膜的宏观变形行为可以通过无矩薄膜理论描述，弯曲仅在接触线附近的区域影响应力与变形分布，如图2.3iii 所示。特别地，当薄膜具有一定面外变形能力和一定弯曲抵抗作用时，其还可能呈现出具有一定程度变形、但弯曲在宏观上可以展现出的平衡构型，如图2.3iv 所示。

为了统一描述体系中拉伸刚度、弯曲刚度及液滴毛细作用等对平衡构型的影响，基于体系的变形几何与量纲平衡，本小节定义了可变形性无量纲参数 λ 和可弯曲性无量纲参数 β ，分别用于评估薄膜发生面外变形的能力以及弯曲效应在宏观尺度上的体现。首先对可变形性进行分析，其可通过特征挠度 δ_* 与固定端半径 R_f 的比值来表征。在液滴 Laplace 压力作用下，基于小变形几何关系，薄膜的曲率与挠曲诱导的面内应变分别满足如下标度关系：

$$\kappa \sim \frac{\delta_*}{r_c^2}, \quad \varepsilon \sim \left(\frac{\delta_*}{r_c}\right)^2 \quad (2.40)$$

基于上述变形标度，可对薄膜的弹性能量进行标度估算。弯曲能量标度为

$$\Pi_{\text{bend}} \sim B\kappa^2 \times r_c^2 \sim B\frac{\delta_*^2}{r_c^2} \quad (2.41)$$

面内弹性拉伸能标度为

$$\Pi_{\text{stretch}} \sim Y\varepsilon^2 \times r_c^2 \sim Y\frac{\delta_*^4}{r_c^2} \quad (2.42)$$

在固定端边界条件下，薄膜上下表面的自由表面能 γ_{sv} 所引起的热力学应力无法通过自由收缩释放，从而转化为等效的面内预拉伸，并与远端施加的预张力 T 叠加。因此，与面内预张力相关的能量贡献可表示为

$$\Pi_T \sim (T + 2\gamma_{sv})\varepsilon \times r_c^2 \sim (T + 2\gamma_{sv})\delta_*^2 \quad (2.43)$$

其中，系数 2 来自薄膜上下两表面。此项能量综合考虑了机械预拉伸与表面能对薄膜面内弹性的整体贡献。液滴 Laplace 压力对薄膜做功的标度为

$$W_p = p\delta_*r_c^2 \quad (2.44)$$

根据液滴平衡方程，上式中均匀压力的标度为 $p \sim \gamma_d/r_c$ 。系统的能量标度平衡要求

$$W_p \sim \Pi_{\text{bend}} + \Pi_{\text{stretch}} + \Pi_T \quad (2.45)$$

由此得到标度平衡方程

$$Y\delta_*^3 + [B + (T + 2\gamma_{sv})r_c^2]\delta_* - \gamma_d r_c^3 = 0 \quad (2.46)$$

求解该一元三次方程，得到特征挠度的标度为

$$\delta_* = \left[\frac{\gamma_d r_c^3}{Y} + \sqrt{\left(\frac{\gamma_d r_c^3}{Y}\right)^2 + \left(\frac{B + (T + 2\gamma_{sv})r_c^2}{Y}\right)^3} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{\gamma_d r_c^3}{Y} - \sqrt{\left(\frac{\gamma_d r_c^3}{Y}\right)^2 + \left(\frac{B + (T + 2\gamma_{sv})r_c^2}{Y}\right)^3} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.47)$$

该特征挠度是能量平衡标度方程的自然求解结果，能够较为真实地反映液滴毛细力的变形诱导效应与薄膜弯曲、拉伸、表面能、预张力等物理参数的变形抵抗作用。将其与薄膜固定端半径 R_f 进行比较，得到润湿体系的可变形性无量纲数

$$\lambda = \frac{\delta_*}{R_f} = \left[\frac{\rho_c^3}{\bar{Y}} + \sqrt{\left(\frac{\rho_c^3}{\bar{Y}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{B}}{\bar{Y}} + \frac{(\bar{T} + 2\bar{\gamma}_{sv})\rho_c^2}{\bar{Y}}\right)^3} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{\rho_c^3}{\bar{Y}} - \sqrt{\left(\frac{\rho_c^3}{\bar{Y}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{B}}{\bar{Y}} + \frac{(\bar{T} + 2\bar{\gamma}_{sv})\rho_c^2}{\bar{Y}}\right)^3} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.48)$$

该无量纲数反映了薄膜的宏观变形程度。当 λ 较小 ($\lambda \leq 0.05$) 时，薄膜处于弱变形区间，宏观形貌基本保持平坦，类似于刚性基底；而 λ 较大 ($\lambda > 0.05$)，薄膜进入显著变形区间，其宏观挠曲效应开始主导界面形貌。

接下来，考虑可弯曲性无量纲数 β 。对于自由边界薄膜，衡量弯曲与毛细作用竞争的自然标度为 $l_{BC} \sim \sqrt{B/\gamma}$ ，其中 γ 是引起可变形体弯曲变形的表面张力作用。然而，在边界固定条件下，弯曲效应在宏观尺度上的显现会受到面内总张力的限制，因此相关标度需要以总张力 T_{tot} 为基准来衡量，此时对应的弯曲长度标度为 $l_{BC} \sim \sqrt{B/T_{tot}}$ 。在实验性研究中，这一概念已被广泛应用^[56,62,112]。Kozyreff 等人^[57] 在理论模型中进一步提出了考虑预张力时的总张力估计形式，而 Davidovitch 和 Vella^[111] 则指出，由毛细力引起的面内拉伸可能并非微扰项，而是决定接触区域薄膜张力的主导因素，从而定义了局部弯曲边界层长度。在本研究中，为了衡量薄膜弯曲效应的宏观整体影响，将所有可能对面内张力产生作用的因素叠加，得到等效弯曲长度标度

$$l_{BC} = \sqrt{\frac{B}{T + 2\gamma_{sv} + Y^{1/3}\gamma_d^{2/3}}} \quad (2.49)$$

上式中， $Y^{1/3}\gamma_d^{2/3}$ 是液滴毛细力所引发的拉伸应力标度，根据方程(2.40)，(2.42)及(2.44)联合求解。

由此，薄膜的可弯曲性无量纲数可定义为接触半径与等效弯曲长度标度比值的平

方，即

$$\beta = \frac{\rho_c^2 (\bar{T} + 2\bar{\gamma}_{sv} + \bar{Y}^{1/3})}{\bar{B}} \quad (2.50)$$

该无量纲数可作为区分弯曲主导与张力主导两种力学机制的判据：当 β 较小时，弯曲效应可在宏观上体现，薄膜整体形状较为平滑，力学响应更接近经典薄板行为；而当 β 较大时，面内张力效应占据主导，其宏观轮廓体现出典型的张力主导型形貌特征，忽略重力的情况下，薄膜变形主要集中在液滴覆盖区域及接触线附近，而非接触区域则保持近似平坦。两种机制的转变临界值为 $\beta \sim 10^2$ 。

2.4 毛细作用下的薄膜润湿平衡状态

本节基于数值计算结果及无量纲参数，分析液滴薄膜体系在不同物理量组合作用下的参数区间过渡及平衡形态变化。

2.4.1 弯曲刚度的影响

首先考察无量纲弯曲刚度的影响。图 2.4 展示了无量纲弯曲刚度对体系平衡构型的调节，包括参数区间的演变、接触角变化以及平衡变形轮廓的调整。

以图 2.4(a) 中无量纲预张力 $\bar{T} = 0$ 的情况为基准进行分析，此时薄膜的变形形态由其内在弹性特征决定。当无量纲弯曲刚度 \bar{B} 从 10^{-1} 连续变化为 10^{-6} 时，体系依次经历弯曲主导的近似刚性区间、弯曲效应在宏观尺度上可观测的过渡区间，以及宏观变形与无矩薄膜理论相一致的张力主导区间，对应的典型变形轮廓如图 2.4(c)-(e)。三种情况下，无矩薄膜极限的计算参数保持一致，由于忽略了重力影响，液滴毛细作用所引起的无矩薄膜变形集中在接触区域，非接触区域薄膜不受横向外荷载，保持平坦状态。图 2.4(f) 展示了接触线附近的薄膜变形情况，该局部区域以 l_{BC} 作为基准尺度放大呈现。在无矩薄膜极限下，变形轮廓在接触线处出现明显斜率不连续现象，而若考虑弯曲刚度，轮廓在该区域保持光滑，不出现斜率突变，体现了弯曲效应对局部形貌的正则化作用。需要说明的是， l_{BC} 用于在宏观尺度上判断弯曲效应是否可以显著区分，是一种有效的弹性毛细长度。该长度综合了多种可能引起薄膜面内张力的作用，因此并不等同于由真实总张力 T_{tot} 决定的实际边界层厚度；在实际物理意义上，真实边界层厚度通常略大于 l_{BC} 。

图 2.4(b) 展示了接触角随无量纲弯曲刚度的变化规律。在计算中，设置无量纲固气表面能 $\bar{\gamma}_{sv} = 0.5$ ，无量纲固液表面能 $\bar{\gamma}_{sl} = 0.24$ ，根据 Young 接触角计算公式(1.16)，液体与薄膜接触的杨氏角满足

$$\theta_Y = \arccos(\bar{\gamma}_{sv} - \bar{\gamma}_{sl}) = 75^\circ \quad (2.51)$$

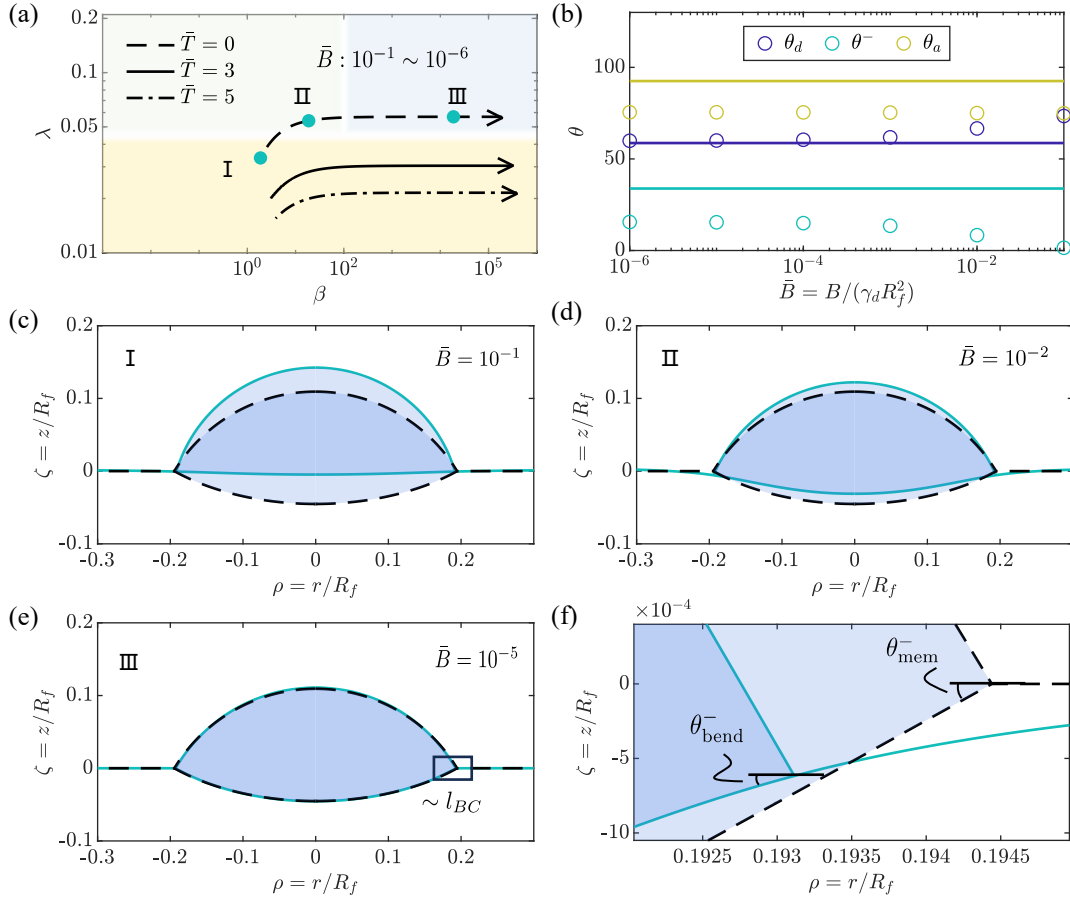


图 2.4 弯曲刚度对薄膜润湿平衡构型的影响：(a) 弯曲刚度作用下的润湿参数区间演变，计算条件为 $\rho_c \sim 0.2$, $\bar{Y} = 50$, $\bar{\gamma}_{sv} = 0.5$, $\bar{\gamma}_{sl} = 0.24$ ；(b) 接触角随弯曲刚度的变化， θ_d , θ^- 及 θ_a 分别表示液气界面接触角，薄膜接触区域转角及二者之和，散点和实线分别对应考虑弯曲效应和无矩薄膜极限的计算结果；(c)-(e) $\bar{T} = 0$ 时，不同弯曲刚度对应的润湿平衡构型，绿色实线与黑色虚线分别对应考虑弯曲效应和无矩薄膜极限的计算结果；(f) 对应 $\bar{B} = 10^{-5}$ 接触线附近区域局部放大图

图2.4(b) 中实线为对应于无量纲拉伸刚度 $\bar{Y} = 50$ 的薄膜极限变形角，由于拉伸刚度未发生变化，其始终保持为常数。图中散点对应考虑弯曲效应的计算，可以发现对应于不同的无量纲弯曲刚度，液滴接触角与薄膜接触区域转角之和 θ_a 始终等于杨氏角，体现了经典板理论的接触角规律。当弯曲刚度较大时（图 (f) 右端），薄膜几乎不发生变形，液气界面夹角近乎等于杨氏角，即刚性极限下的表观接触角。而当弯曲刚度较小时（图 (f) 左端），液气界面夹角值向薄膜极限趋近，当 $\bar{B} \leq 10^{-5}$ 时，二者近乎相等，约为 $\theta_d \sim 58.7^\circ$ 。此时根据数值计算结果，考虑弯曲效应时，接触区域变形角 $\theta_{\text{bend}}^- \sim 15.6^\circ$ ，薄膜极限下，接触区域变形角 $\theta_{\text{mem}}^- \sim 33.8^\circ$ ，因此，接触角之间的关系满足

$$\frac{\theta_Y - \theta_d}{\theta_{\text{mem}}^-} \sim \frac{\theta_{\text{bend}}^-}{\theta_{\text{mem}}^-} \sim \frac{1}{2} \quad (2.52)$$

该关系不仅与 Schroll 等人^[104] 能量最小化的理论推导完全一致，也与 Nadermann 等

人^[118] 以及 Schulman 和 Veress^[56] 的实验结果相符。在此理论出现之前, 两组实验在总接触角 θ_a 是否等于杨氏角上曾得出完全相反的结论^[111], 上述分析表明, 这种差异的产生源于两组实验分别采用了 θ_{bend}^- 和 θ_{mem}^- 作为实验测量的表观接触角。需要说明的是, 在图 (f) 所示的范围内, 无量纲拉伸刚度虽然较大, 但尚未达到严格满足 $\gamma_d/Y \sim 0$ 的程度。若达到该程度, 方程(2.52)所示的关系将会更加严格地成立。

当无量纲预张力较大时, 薄膜的整体变形形态主要由预张力主导, 其弯曲效应及整体可变形性在宏观尺度上均不显著。随着预张力的增大, 考虑弯曲效应的 FvK 薄膜和无矩薄膜的固液界面夹角均逐渐减小; 相应地, 液气界面夹角占据主导地位, 并在两种情形下均趋近于杨氏角。

此外, 本小节还考察了液滴润湿性不同的情况, 如图2.5所示, 其对应杨氏角 $\theta_Y = 120^\circ$ 。杨氏角为钝角时, 接触角度随无量纲弯曲刚度的变化规律与锐角的情况相一致, 随着弯曲刚度减小(图中紫色散点从右到左), 液气界面夹角逐渐从杨氏角过渡为与薄膜极限液气界面夹角相等, 当 $\bar{B} \leq 10^{-5}$ 时, $\theta_d \sim 105.4^\circ$, $\theta_{\text{bend}}^- \sim 14^\circ$, $\theta_{\text{mem}}^- \sim 27.4^\circ$, 仍与方程(2.52)所描述的关系相一致。图2.5(b)-(e)展示了随着弯曲刚度减小, 薄膜变形从不可变形的参数区间, 过渡到可变形且弯曲效应在宏观上可观察的区间, 再进一步进入薄膜极限参数区间的过程。

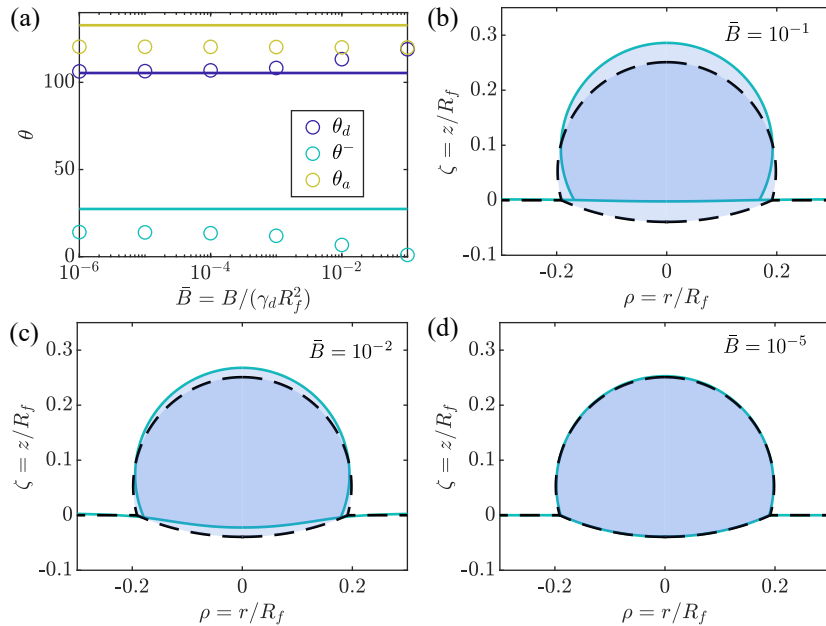


图 2.5 弯曲刚度对薄膜润湿平衡构型的影响: (a) 接触角随弯曲刚度的变化, 计算条件为 $\rho_c \sim 0.2$, $\bar{Y} = 50$, $\bar{\gamma}_{sv} = 0.5$, $\bar{\gamma}_{sl} = 1$, $\bar{T} = 0$; (b)-(d) 不同弯曲刚度对应的润湿平衡构型, 绿色实线与黑色虚线分别对应考虑弯曲效应和无矩薄膜极限的计算结果

2.4.2 液滴尺寸的影响

接下来, 考虑液滴尺寸对液滴-薄膜体系平衡形态的影响。图2.6展示了在不同液滴

半径下，随着薄膜弯曲刚度增减小，润湿体系的平衡构型变化。由图2.6(a)可以看出，对于每一液滴尺寸，弯曲刚度减小均使体系参数区间向无矩薄膜极限方向发展；同时，当液滴尺寸较大时，无论弯曲刚度取何值，薄膜的整体变形能力均明显增强，且更易转换到弯曲刚度可忽略的区间。图2.6(b)-(d)展示了较硬薄膜 $\bar{Y} = 100$, $\bar{B} = 0.1$ 在不同尺寸液滴作用下的变形轮廓。当液滴接触半径 $\rho_c \sim 0.2$ 时，弯曲刚度对整体变形具有显著调节作用，薄膜几乎表现为不可变形；当 $\rho_c \sim 0.4$ 时，即便弯曲刚度较大，薄膜仍会产生轻微但宏观可辨的变形；而当 $\rho_c \sim 0.9$ 时，尺寸效应占据主导地位，即使对应较硬薄膜，整体变形仍然显著，此时 $\bar{B} = 0.1$ 所对应的较大弯曲刚度对宏观构型的影响已十分有限，变形轮廓趋向于薄膜极限情形下的计算结果。在本算例中，为突出尺寸效应对薄膜可弯曲性的增强，选取了拉伸刚度较大的薄膜参数。大尺寸液滴使薄膜整体发生显著面外挠曲，但接触线处局部顺应性仍有限。液滴自由界面为球面，接触线高度和接触角的微小差异在球形轮廓下被放大，从而导致液滴中心高度出现一定差别。图2.6(e)-(g)展示了杨氏角 $\theta_Y = 120^\circ$ 的情况，尺寸效应主导的薄膜变形规律与上述锐角的情况相一致。

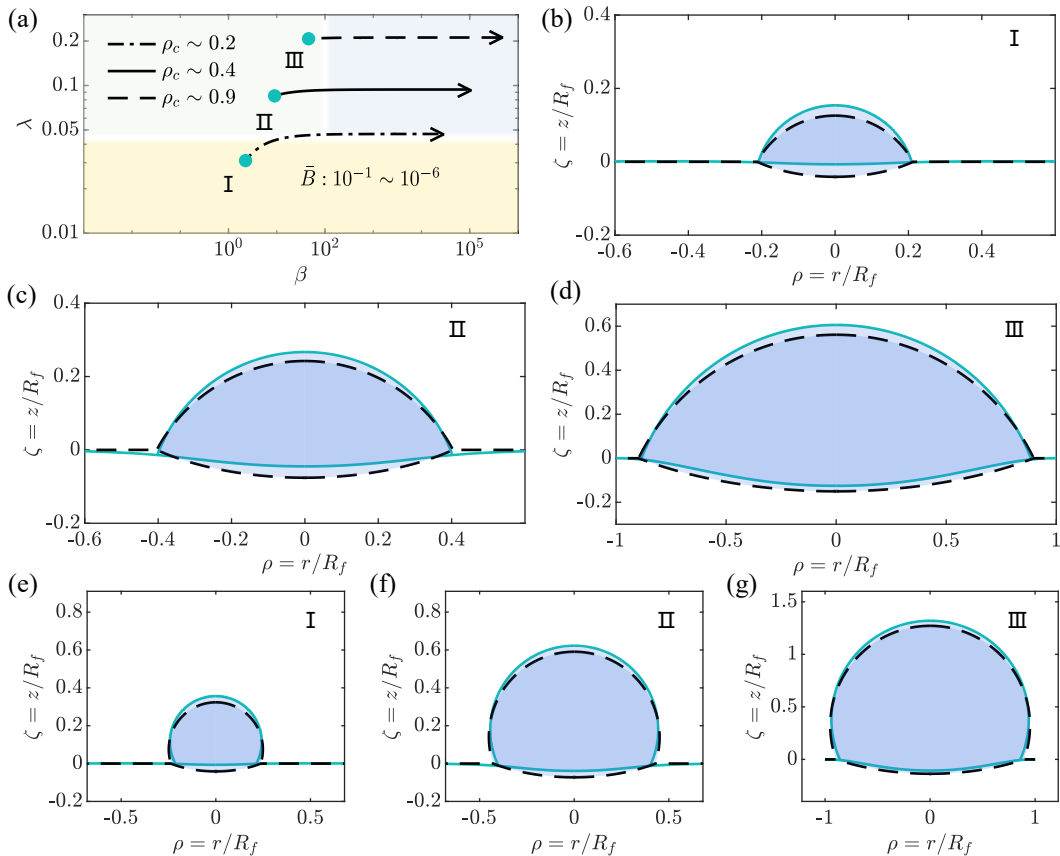


图 2.6 液滴尺寸对薄膜润湿平衡构型的影响：(a) 液滴半径对润湿参数区间的改变，计算条件为 $\bar{Y} = 100$, $\bar{\gamma}_{sv} = 0.5$, $\bar{\gamma}_{sl} = 0.24$, $\bar{T} = 0$; (b)-(d) 不同液滴尺寸对应的润湿平衡构型，绿色实线与黑色虚线分别对应考虑弯曲效应和无矩薄膜极限的计算结果；(e)-(g) 杨氏角为钝角时，对应不同液滴尺寸的薄膜润湿变形轮廓

2.4.3 拉伸刚度的影响

接下来，考虑薄膜拉伸刚度对液滴薄膜体系平衡形态的影响，如图2.7所示。

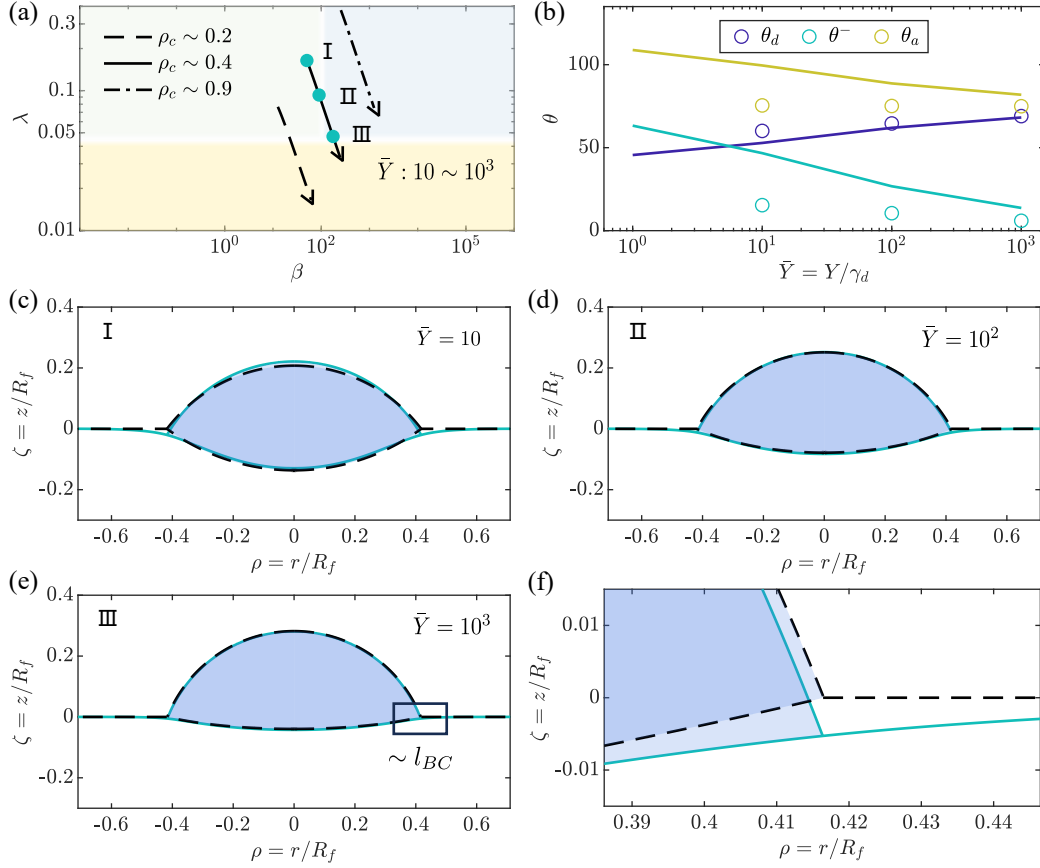


图 2.7 拉伸刚度对薄膜润湿平衡构型的影响：(a) 拉伸刚度对润湿参数区间的改变，计算条件为 $\bar{B} = 10^{-2}$ ， $\bar{\gamma}_{sv} = 0.5$ ， $\bar{\gamma}_{sl} = 0.24$ ， $\bar{T} = 0$ ；(b) 拉伸刚度对接触角的影响，散点和直线分别对应 $\bar{B} = 10^{-2}$ 和薄膜极限，其余条件均一致；(c)-(e) 不同拉伸刚度的润湿平衡构型，绿色实线与黑色虚线分别对应 $\bar{B} = 10^{-2}$ 和无矩薄膜极限的计算结果；(f) $\bar{Y} = 10^3$ ，平衡变形轮廓的接触线放大图

图2.7(a)展示了不同液滴尺寸下，拉伸刚度变化对参数区间的影响。对应于每一液滴尺寸，随着拉伸刚度的增大，薄膜的变形逐渐由弯曲主导过渡为拉伸主导，同时整体变形幅度明显减小。图2.7(c)-(f)讨论了液滴半径 $\rho_c \sim 0.4$ 时，拉伸刚度增大所带来的薄膜变形轮廓改变。当拉伸刚度较小（对应点 I， $\bar{Y} = 10$ ），即便弯曲刚度较大 $\bar{B} = 10^{-2}$ ，由于薄膜本身较为柔软，其整体变形仍然较大，此时弯曲刚度对于宏观变形的影响已趋于可忽略。当拉伸刚度增大至 $\bar{Y} = 1000$ ，薄膜的拉伸响应接近刚性极限，此时弯曲效应对宏观变形的影响可完全忽略，仅在接触线附近通过平滑局部曲率对变形起到正则化作用，如图2.7(f)所示。图2.7(b)展示了不同拉伸刚度下接触线处角度的变化规律，对于无矩薄膜，拉伸刚度的增大使薄膜接触区域的转角迅速减小，而液滴转角有所增大，二者之和呈下降趋势；对于考虑弯曲刚度的情况，拉伸刚度的增大同样

会限制接触区域转角，但角度关系仍满足经典板理论的接触角规律。当 $\bar{Y} = 10^3$ 时，两种情形下接触区域薄膜转角均趋向于零，但仍满足方程2.52中的二倍关系。特别地，在此图中将薄膜极限拓展到 $\bar{Y} = 1$ 的超软薄膜，此时薄膜接触区域的变形角大小已超过液气界面转角，接触线处角度值分别为 $\theta_a = 108.85^\circ$, $\theta_i = 63.28^\circ$, $\theta_d = 45.57^\circ$ 。考虑完全由表面张力控制的情况，液气界面的表面张力为 $\bar{\gamma}_d = 1$ ，固液界面的总表面张力为 $\bar{\gamma}_{sl} + \bar{\gamma}_{sv} = 0.74$ ，固气界面的总表面张力为 $2\bar{\gamma}_{sv} = 1$ ，基于 Neumann 定理得到的接触角为 $\theta_a = 111.7^\circ$, $\theta_i = 68.3^\circ$, $\theta_d = 43.3^\circ$ 。由此可见， $\bar{Y} = 1$ 时，界面近乎完全由表面张力主导。

2.5 液滴重力对薄膜润湿行为的影响

上述分析讨论了液滴毛细作用诱导薄膜变形的机制，其适用于大多数二维材料的润湿性测试等实验场景，该驱动模式被众多文献所研究^[61,111]。然而，当液滴尺寸或密度较大时，重力也可能会影响液体在固体上的铺展形态，如使液滴自由表面变平，从而影响固液接触角^[38,119]。因此，本节给出重力对弹性薄膜润湿构型的补充分析。

考虑液滴密度 ψ ，润湿体系的总自由能可改写为

$$\Pi = \Pi_{\text{bend}} + \Pi_{\text{stretch}} + \Pi_{\text{surf}} + p_0 \left[\int_0^{r_c} 2\pi r(z_d - z) dr - V_{\text{droplet}} \right] + \int_0^{r_c} \frac{\psi g}{2} r(z_d^2 - z^2) dr \quad (2.53)$$

利用方程(2.10)计算该自由能的变分，得到考虑重力作用的液滴 Laplace 方程

$$\gamma_d \left[\frac{z'_d}{r(1+z_d'^2)^{1/2}} + \frac{z''_d}{(1+z_d'^2)^{3/2}} \right] = \psi g z_d + p_0 \quad (2.54)$$

其中， p_0 为考虑重力的情况下液滴内部压力基准值，当液滴形状近似为球形时，其近似满足 $p_0 = 2\gamma_d/R$ ，这里的 R 表示液滴顶点曲率半径。本小节在体系能量中统一考虑了重力和毛细作用的影响，该基准压力通过数值计算自然确定其具体值。考虑重力时，对应的薄膜面外平衡方程为

$$B\nabla^2\nabla^2 z - N_r \kappa_r - N_\theta \kappa_\theta - \gamma(r)(\kappa_r + \kappa_\theta) = p(r) \quad (2.55)$$

其中表面张力函数 $\gamma(r)$ 同方程(2.13)，液滴压力项则改写为

$$p(r) = \begin{cases} \psi g z + p_0 & r < r_c \\ 0 & r_c < r < R_f \end{cases} \quad (2.56)$$

根据变分推导，重力效应的引入并不改变接触线处的连续性及其平衡条件，但会引入新的无量纲参数 $B_o = \psi g R_f^2 / \gamma_d$ 。该无量纲参数在考虑重力及毛细作用的体系下十分常见，通常被称为邦德数 (Bond number)，其衡量了重力作用和毛细作用的相对强度。在本小节所讨论的润湿体系中，选取薄膜固定半径 R_f 作为长度尺度，以刻画液滴重力和毛

细力的双重作用对薄膜宏观变形的影响。

考虑重力时，液滴自由膨胀表面不再是球形，需要基于其平衡方程(2.54)进行数值求解，该方程描述了液滴变形的高度几何非线性，其与薄膜部分的多点边界值问题耦合，使求解更为复杂。为解决该问题，将液滴平衡方程改写为基本坐标量 $\{r(\xi), z_d(\xi), \phi_d(\xi)\}$ 关于弧长 ξ 的一阶方程组，其无量纲形式为

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \cos \phi_d, \quad \frac{d\zeta_d}{d\xi} = -\sin \phi_d, \quad \frac{d\phi_d}{d\xi} = -\bar{p}_0 - B_o \zeta_d - \frac{\sin \phi_d}{\rho} \quad (2.57)$$

上式各几何参量仍通过固定端半径 R_f 进行无量纲化。方程(2.57)可通过 MATLAB 的 ode45 函数进行求解。具体计算中，首先给出初始化参数 \bar{p}_0 , ζ_0 , ξ_c 以及 ρ_c ，分别对应液滴基准压力、液滴对称中心高度、接触线对应的弧长及接触半径，基于这些参数求解方程(2.57)，得到液滴接触角 $\phi_d(\rho_c) = \theta_d$ ，从而结合初始接触半径求解薄膜物理场；进一步，根据连续性条件和平衡条件构造误差函数，对各初始参数进行牛顿迭代，直至误差满足规定要求。

图2.8中讨论了不同邦德数 B_o 对润湿平衡轮廓的影响。随着 B_o 的增大，液滴自由表面的顶点趋于平坦，薄膜整体变形明显增强；在接触线附近，薄膜接触区域的变形角逐渐增大，而液滴接触角逐渐减小。值得注意的是，当重力作用导致体系发生较大变形时，FvK 薄板理论的结果并未进一步趋近于无矩薄膜理论。这是因为薄板理论中弯曲刚度通过曲率产生额外的恢复作用，而无矩薄膜理论仅依赖面内拉伸与预张力来平衡外载荷，两者抵抗重力变形的力学机制不同。

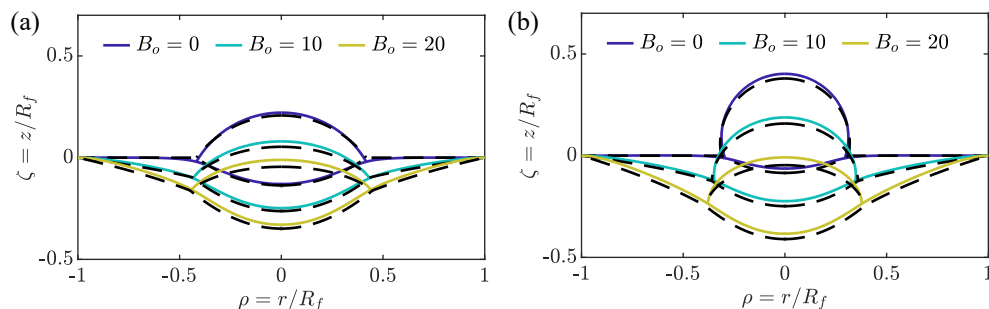


图 2.8 液滴重力作用对薄膜润湿平衡构型的影响：(a) 杨氏角为 75° 的情况；(b) 杨氏角为 120° 的情况。两组结果均采用计算参数 $\bar{Y} = 10$, $\bar{B} = 10^{-2}$, $\bar{T} = 0$, $\rho_c \sim 0.4$ ，黑色虚线表示无矩薄膜理论的计算结果

2.6 本章小结

本章从 Föppl-von Kármán 理论的变形描述出发，构建了无柄液滴在悬浮薄膜上静态平衡时的体系总自由能泛函，考虑了各界面表面能、薄膜弯曲能和拉伸能。对总自由能进行变分分析，推导了体系的平衡方程与边界条件，进而对边界值问题进行数值求解，得到轴对称体系下空间变化的薄膜张力场与位移场。基于能量标度分析，首先确

立了液滴毛细诱导下薄膜变形的特征挠度 δ_* ，将其与薄膜尺寸进行比较，得到描述薄膜宏观可变形性的无量纲参数 λ ；在考虑毛细诱导拉伸张力、表面张力、预张力的基础上，进一步确立了有效弯曲长度标度 l_{BC} ，将其与液滴尺寸进行比较，得到衡量薄膜宏观弯曲效应显现程度的无量纲参数 β 。基于数值计算结果对薄膜在不同物理量调节下的区间变化进行了讨论，并详细分析了各区间下薄膜的变形及润湿角等力学行为。此外，针对较大液滴，本章还讨论了重力对润湿平衡构型的影响。考虑重力后，液滴自由膨胀表面不再保持为球形，其变形形状需通过初值问题求解方法得到。液滴重力作用通过无量纲参数 B_o 描述，重力作用使液滴顶部平坦化，液气界面接触角减小，而薄膜变形程度和固液界面接触角均增大。

第三章 薄膜弹性毛细效应实验与理论

3.1 引言

表面张力驱动的毛细效应是流体力学中的基本现象，由于液体分子间相互作用的能量最小化，液体会倾向于减小自由表面的面积，从而对接触的固体或液体施加力。与此同时，固体材料会根据其弹性模量对外力产生形变。当这两种效应同时作用于弹性物体时，表面张力能够显著调控其形变行为。这种由表面张力与弹性力学耦合产生的变形现象，被称为弹性毛细作用。在自由边界的固体上，这类效应容易在宏观上显现，例如液滴诱导的薄膜弯曲^[120]或表面张力使凝胶板圆化^[121]。然而，自由边界的弹性毛细应力源自界面能热力学最小化，本质上独立于外力响应，因此无法被直接量化。

与之相对，在受控边界条件下，由热力学应力驱动的弹性变形能够被转化为可测的力学响应，从而为弹性毛细现象的量化提供了一种思路。对于薄膜体系，在最简单的纯拉伸情况下，毛细薄膜如肥皂膜等表现出恒定的力-位移关系，而纯弹性薄膜的力学行为则遵循虎克定律，如图3.1(a)所示。当弹性与毛细作用同时存在时，力学响应呈现叠加效应，有效力-位移曲线整体发生平移，使得零力状态对应轻微负应变。然而，通过简单拉伸实验直接测量薄膜的表面张力颇具挑战性，因为在零力点附近，弹性毛细效应与纯弹性响应难以区分；仅当拉伸幅度较大时，更复杂的表面张力效应显现，从而使表面效应变得明显^[105]。相较于拉伸，压痕、鼓泡等面外变形实验在薄膜材料力学特征表征中应用更为广泛^[71,122-130]。对于边界被固定的薄膜，在承受横向荷载（如压力）时，毛细薄膜的 Laplace 定律表明其在小变形下满足线性的力-位移关系^[38]，而纯弹性薄膜则表现出三次非线性的力-位移关系^[69,131]。当两种效应同时存在，其叠加会产生独特的弹性毛细效应^[35]，如图3.1(b)所示。

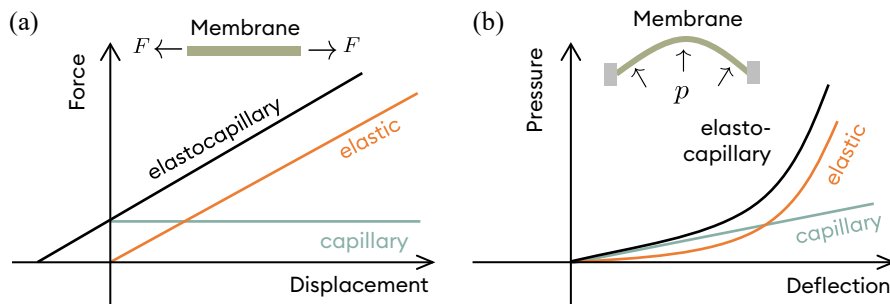


图 3.1 毛细、弹性及毛细-弹性薄膜在 (a) 简单拉伸及 (b) 横向荷载作用下的力学行为示意

基于上述分析，横向载荷实验在薄膜表面效应表征上具有优势。但在真实的实验场景下，薄膜的力学响应往往会受表面张力、预应力或残余应力及弹性刚度的耦合作

用，且表面张力与预应力的作用形式极为类似^[35,131]，因此，无法从单一的力-位移曲线中分离出表面张力。

本章通过不同介质-薄膜界面上的压痕实验克服了上述困难。具体地，通过对比氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面测得的力-位移曲线，证明了表面张力对二维薄膜的横向变形具有清晰可测的影响。此外，基于这种对比效应提出了测定二维材料润湿性的新方法。具体内容安排如下：第 2 节阐述不同介质-石墨烯界面的压痕实验设计，包括实验装置、界面构造方法与结果表征等，第 3 节建立含表界面效应的压痕理论模型，并对实验结果进行拟合和分析，第 4 节进一步延伸悬浮薄膜的弹性毛细效应的表征方法，包括对压痕实验中弯曲效应与薄膜下陷效应的讨论，以及鼓泡构型的弹性毛细效应表征，第 5 节总结本章核心结论，并展望面外变形模型在薄膜表界面研究中的进一步应用。

3.2 弹性毛细效应压痕实验

本节通过定制的实验平台，实现轴对称固定边界石墨烯薄膜分别与氮气和水接触的压痕实验，以显化薄膜的弹性毛细效应。实验中需保证变量单一化，并排除外界环境因素的影响。接下来对具体的实验设计方案及结果进行说明。

3.2.1 实验装置与样品制备

实验装置：压痕实验在定制的氮化硅-硅-氮化硅 ($\text{SiN}_x\text{-Si-SiN}_x$) 基底上进行，如图3.2所示，放大中心区域以说明石墨烯薄膜与介质的接触细节。基底的中心部位有圆形通孔，半径 $\sim 1200\text{ nm}$ ，石墨烯样品尺寸不小于 $10 \times 10\ \mu\text{m}^2$ ，显著大于通孔半径，其周围边界与 SiN_x 基底之间通过范德华吸引作用形成固定端边界条件。通孔下方与放置介质的环境腔室直接连通，实验过程中介质通过通孔达到石墨烯底部，与之充分接触以形成氮气-石墨烯界面或水-石墨烯界面。通过原子力显微镜 (Atomic Force Microscopy, AFM) 在悬浮石墨烯的中心部位施加横向载荷。

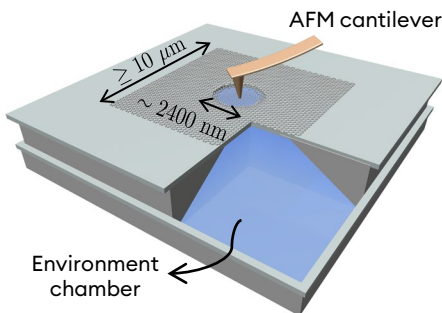


图 3.2 轴对称悬浮石墨烯压痕实验装置

基底制备：购买双面涂覆 500 nm SiN_x 层的硅晶圆作为主基底。首先，以预先图案

化的光刻胶作为掩膜，采用反应离子刻蚀在其中一层 SiN_x 上刻蚀出 $780 \times 780 \mu\text{m}^2$ 的区域。随后，将基底浸入 40 wt% 的氢氧化钾溶液中， 90°C 下反应 10 h，以在硅基底中形成各向异性刻蚀空腔，其顶端尺寸为 $100 \times 100 \mu\text{m}^2$ 。最后，采用与第一步相同的刻蚀工艺，在顶部 SiN_x 层上加工半径为 1200 nm 的圆孔。

石墨烯机械剥离与转移：采用聚甲基丙烯酸甲酯 (Polymethyl Methacrylate, PMMA) 辅助干法转移技术，将石墨烯转移至顶部 SiN_x 表面并覆盖圆孔。首先，在硅片上依次旋涂形成聚合物双层薄膜，包括水溶性底层聚乙烯醇 (PVA) 和分子量为 495 K 的 PMMA 顶层。通过机械剥离将石墨烯片转移至聚合物双层膜上。定位目标单层石墨烯片后，将样品浸入去离子水中以溶解 PVA 缓冲层，使石墨烯/PMMA 膜从基底释放并漂浮于水面。利用拾取工具 (如洁净载玻片) 将石墨烯/PMMA 膜转移，并通过显微操作将目标石墨烯片对准 SiN_x 层上的圆孔中心位置。待膜与基底充分贴合后，使用丙酮溶解并去除 PMMA 支撑层。具体流程如图 3.3 所示。

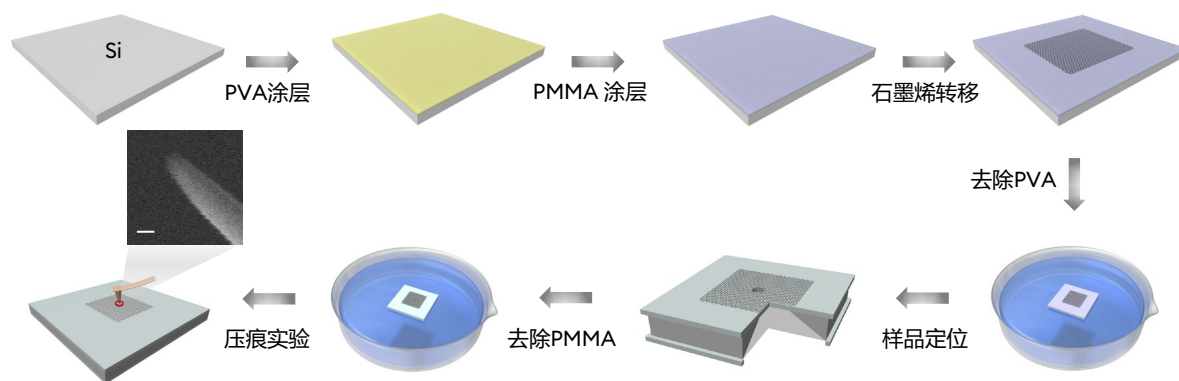


图 3.3 样品制备、转移及压痕测试示意图。压痕测试步骤中放大图展示了针尖的扫描电子显微镜图像，比例尺为 50 nm

超临界干燥：去除光刻掩膜的过程中，界面会存在一定程度的应力释放，使薄膜初始形貌产生下陷，静息状态下，石墨烯与圆孔内壁的范德华吸引作用也会使薄膜产生轻微下陷。为有效抑制这种下陷效应，采用超临界二氧化碳干燥。石墨烯转移后，将样品浸入丙酮中 12 h 溶解 PMMA 支撑层，并用新鲜丙酮多次冲洗以确保完全清除。随后，将样品置于 Leica EM CPD300 超临界干燥仪中，向腔室注入液态二氧化碳，并通过约 24 个循环 (约 3 h) 反复冲洗，以实现丙酮向液态 CO_2 的充分置换。之后将腔室升温升压至超过 CO_2 的临界点 (31°C , 7.38 MPa)，使其进入超临界流体状态，并最终缓慢降压至环境压力完成干燥过程。

单层石墨烯的拉曼表征：采用 Horiba HREvolution 共聚焦微拉曼系统对样品进行光谱测量。在室温条件下，使用波长为 532 nm 的激光作为激发源，光斑尺寸约为 $2 \mu\text{m}$ 。激光功率控制在 10 mW 以下以最大限度减少光致发热。采用数值孔径为 0.9 的 $100\times$ 物镜聚焦入射光并收集拉曼散射信号。在氮气-石墨烯界面测得的拉曼光谱呈现单一、对

称且锐利的 2D 峰，半高全宽约为 28.5 cm^{-1} ，表征了样品为单层石墨烯^[132-133]。

3.2.2 实验测试方法

介质引入与界面构造：实验在室温下进行。为减轻湿度等其他环境因素的影响，实验在受控氮气环境下进行，采用如图3.4(a)所示的 3D 打印不锈钢容器，持续注入氮气填充石墨烯上方的空间，使实验装置与外界环境隔离。该容器还提供稳定基座以固定基底进行原位测试。

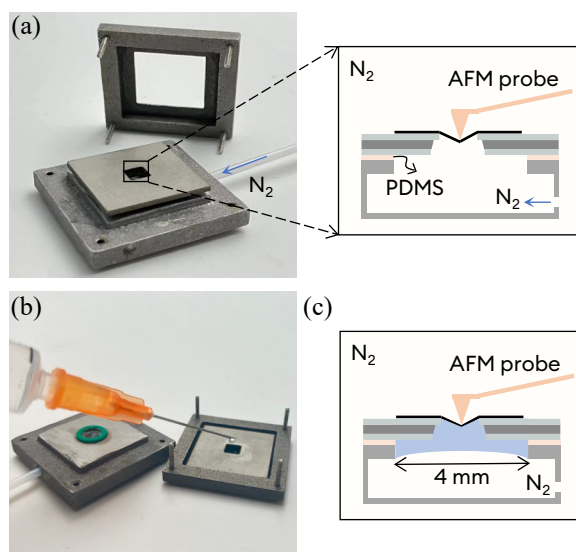


图 3.4 介质引入与界面构造：(a) 氮气引入装置，插图是装置中心部位的横截面示意图；(b) 注水装置；(c) 注水后的实验装置示意

容器中心处的原位实验区包含固定的夹层基底及基底下方的密封环境腔室，连接处通过聚二甲基硅氧烷 (PDMS) 薄膜密封。环境腔室侧壁底部配备气体介质注入端口，实验中，氮气首先通过端口进入腔室，形成氮气-石墨烯界面，如图3.4(a)放大图。完成氮气-石墨烯界面测试后，实验装置被分离并倒置。如图3.4(b)所示，以异丙醇 (IPA) 作为润湿剂向硅腔注入水。因 IPA 表面张力较低，首先用于渗透填充腔体。随后反复以去离子水置换，直至水-石墨烯界面拉曼光谱中不再出现 IPA 相关峰值，仅保留水与石墨烯的特征峰。将样品置于负压环境中 10 min，消除石墨烯与水层间残留空气。在水-石墨烯界面实验中，样品背面浸没于水中，水体积由 $4 \times 4 \times 1 \text{ mm}^3$ 的储液槽限制，如图3.4(c)所示。每次水-石墨烯界面实验后，含浸水石墨烯的装置将转移至以丙酮为中间溶剂的超临界干燥系统。通过溶剂置换及后续超临界 CO₂ 干燥，在避免毛细作用力的前提下去除液体，从而防止悬浮石墨烯产生额外应力。最后向环境箱重新注入氮气，以进行重复的氮气-石墨烯界面实验。

AFM 表征：悬浮石墨烯样品构建完成后，采用轻敲模式原子力显微镜 (tapping-mode AFM, SPI3800N) 对样品进行原位成像，以评估其表面形貌及结构完整性。基

于 AFM 形貌图与高度分布对样品进行筛选，选取表面形貌均匀、无明显褶皱或缺陷且高度分布连续的区域用于后续实验。一组具有代表性的氮气-石墨烯界面 AFM 图像如图 3.5(a) 和 (c) 所示。合格样品随后储存于氮气环境中以最大限度减少污染。置换介质为水之后的界面也需满足上述特征，如图 3.5(b) 和 (d) 所示。

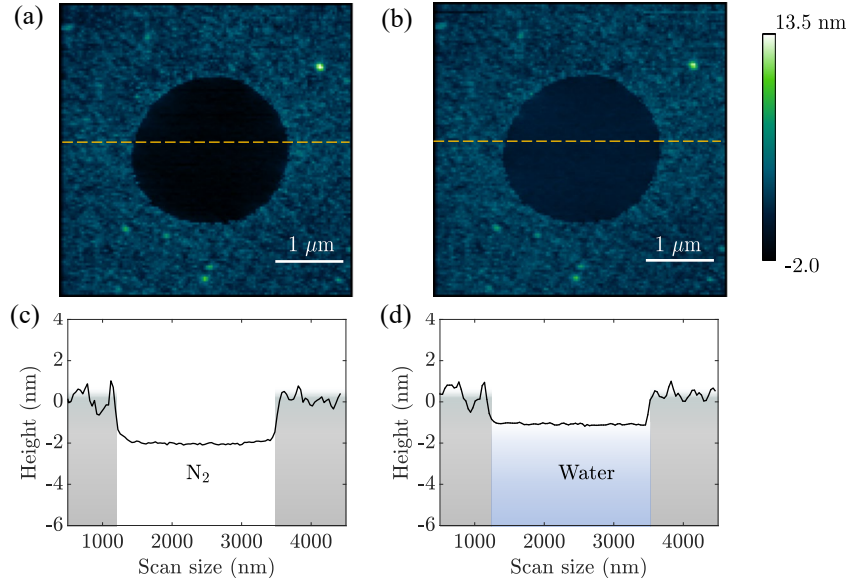


图 3.5 同一石墨烯薄膜的原位 AFM 表征：(a) 氮气-石墨烯界面的表面形貌图；(b) 水-石墨烯界面的表面形貌图；(c) 氮气-石墨烯界面的高度剖面图；(d) 水-石墨烯界面的高度剖面图

石墨烯下方介质为氮气时，孔壁范德华吸引作用会使薄膜发生轻微下陷，介质更换为水时，界面会轻微抬升。对于所有实验样品，中心区域需保持平坦，氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的初始几何差异不大于 4 nm，相较于初始状态下的薄膜有效半径 (≥ 1000 nm)，下陷影响可忽略。后续第 3.5.2 节将对此下陷效应进行详细分析。实验中使用的 AFM 悬臂梁刚度约为 2.53 N/m。该刚度既能减轻对石墨烯薄膜的机械损伤，又能提供足够的探针接触力。

实验测试过程：采用 AFM 对悬浮石墨烯进行压痕实验。压痕实验在 4 组石墨烯样品上进行。对于每一组样品，首先在氮气-石墨烯界面开展压痕测试。实验过程中，将 AFM 探针精确定位于悬浮石墨烯薄膜的中心位置，驱动悬臂向下位移 d ，并实时记录对应的法向作用力 F ；当载荷达到预设的最大值（约 140 nN）后，悬臂回缩以释放外力。在测试过程中，悬臂梁的共振频率约为 160 kHz，自由振荡振幅约为 85 nm，设定点比值为 0.8；所用探针的标称尖端半径约为 30 nm，扫描速率为 0.5 Hz。加载速度固定为 54 nm/s，以确保实验处于准静态条件。

完成氮气-石墨烯界面的重复测试后，按照“介质引入与界面构造”中所述的方法将实验介质更换为水，并在水-石墨烯界面上进行压痕实验，实验流程与氮气-石墨烯界面测试相同。随后，对样品进行干燥处理，并在环境池中重新引入氮气，再次开展氮气-石墨烯界面的压痕实验，以验证实验结果的可重复性。针对每一种界面类型，均进

行了三次重复实验。实验过程中，结合拉曼光谱表征以监测和保证界面条件的稳定性，例如水与石墨烯之间的充分接触等。

3.2.3 实验结果与现象分析

根据上述实验测试方法进行压痕实验，实验测量表明，与氮气-石墨烯界面相比，水-石墨烯界面在压痕过程中表现出明显且稳定的软化行为，在施加相同外力的条件下，水-石墨烯界面更易产生面外变形的力学响应，如图3.6(a)所示。

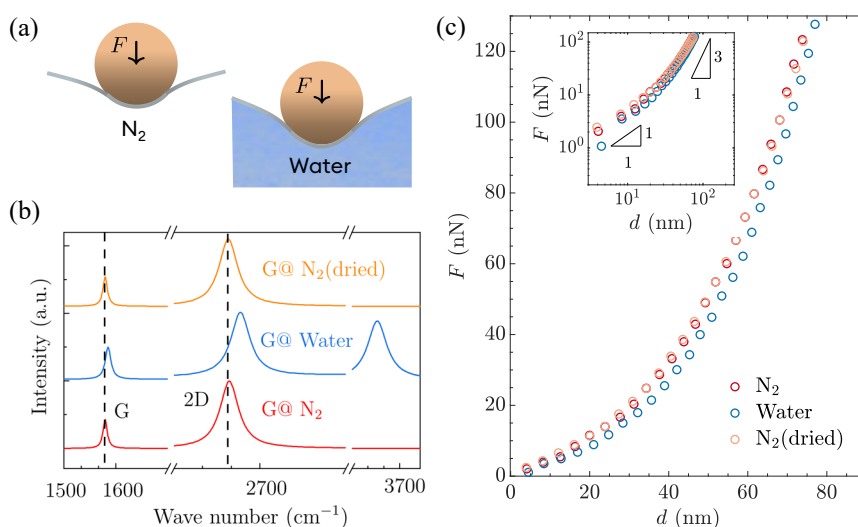


图 3.6 不同介质-石墨烯界面的压痕实验：(a) 水-石墨烯界面软化现象示意；(b) 氮气-石墨烯界面、水-石墨烯界面及干燥后氮气-石墨烯界面的拉曼光谱。所有光谱均以 2D 峰强度为基准进行归一化处理；(c) 同一石墨烯样品上测得的压痕力-位移曲线，氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面分别用红色和蓝色标记。黄色标记对应同一样品与水接触并重新干燥后的压痕曲线。插图为对数坐标系下的压痕曲线

在界面力学性质的表征实验中，介质更换前后界面状态的稳定性及充分接触条件是保证实验可靠性的关键因素。为此，实验过程中采用拉曼光谱对上述条件进行验证。图3.6(b)展示了不同界面条件下的拉曼光谱。与氮气-石墨烯界面相比，水-石墨烯界面的 G 峰和 2D 峰分别发生约 5.09 cm^{-1} 和 12.35 cm^{-1} 的蓝移，同时在约 3400 cm^{-1} 附近出现额外峰位，为石墨烯与水的充分接触提供了证据^[134]。对于经历“氮气-水-氮气”介质切换过程（包括溶剂交换及超临界 CO_2 干燥）的样品，其最终氮气-石墨烯界面的拉曼光谱完全恢复至初始状态（见图3.6(b)），从而证实了该界面构造过程的可逆性。这一结果进一步排除了复杂膨胀效应对界面边界条件的干扰。图3.6(c)展示了一组代表性的压痕力-位移曲线。无论是氮气-石墨烯界面还是水-石墨烯界面，实验结果均遵循引言部分讨论的标度律^[131,135]：随着压痕深度 d 的增加，体系的力学响应从由外力作用（如预张力）主导的线性区域逐渐过渡至由弹性主导的三次方区域，该过渡区间大致位于 20-60 nN 的荷载范围内。

在相同外力作用下，水-石墨烯界面表现出比氮气-石墨烯界面更大的形变，这表明界面差异会显著影响悬浮薄膜的力学响应。在更大压痕深度下，两条力-位移曲线趋于平行（见图3.6(c)插图），表明单层石墨烯的固有弹性最终主导了响应。Ferrari 等人^[134]曾将类似的软化现象归因于石墨烯初始几何构型差异引起的力学响应变化。然而，本实验中氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的初始高度差异不超过 4 nm，这一微小差异不足以解释观察到的力学差异。相比之下，接触介质的变化对界面张力的影响最为显著。因此，我们从界面作用的角度对实验结果进行理论建模与分析。

3.3 含常数表面张力的无矩薄膜压痕理论

对于上述压痕接触体系，由于薄膜边界固定，固体表面能无法通过变形释放，而转化为张力。同时，压头与薄膜之间存在界面黏附。为系统研究这两种界面效应对压痕力学响应的影响，本节将图3.3所示的压头建模为刚性球体，并利用无矩薄膜理论描述薄膜的变形行为。在模型中，固体表面张力作为薄膜总张力的一部分，参与薄膜的受力平衡^[136]；而界面黏附则通过接触线处的虚功原理自然引入。对模型进行数值求解以说明二者对压痕力-位移曲线的影响，并对实验现象进行解释。

3.3.1 平衡方程与接触线条件

考虑任意形状的可变形薄膜，其面内弯曲刚度可忽略。在外部压力 \mathbf{p} 的作用下，薄膜发生变形，同时能够在膜内传递面内牵引力。为建立控制方程，对膜上任意选取的一块曲面区域 a 进行应力平衡分析。设 \mathbf{n} 为薄膜的单位法向， ∂a 为所选区域的边界， \mathbf{m} 为边界上位于曲面内的外法向单位矢量， $\boldsymbol{\tau}$ 为薄膜面内 Cauchy 应力张量。由于薄膜为静态平衡体系，该区域的外部压力与边界牵引的合力必须为零，从而得到积分形式的力平衡方程

$$\int_a \mathbf{p} da + \oint_{\partial a} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} dl = 0 \quad (3.1)$$

在考虑常数表面张力的薄膜中，膜内面内应力可以分解为两部分：一部分是零应变时即存在的各向同性表面张力 γ ，另一部分是由面内应变产生的弹性应力 \mathbf{N} 。因此，总薄膜张力可以写作

$$\boldsymbol{\tau} = \gamma \mathbf{I}_s + \mathbf{N} \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{I}_s = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ 为曲面投影算子。利用曲面散度定理，将边界积分转换为面积散度

$$\oint_{\partial a} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} dl = \int_a \nabla_s \cdot \boldsymbol{\tau} da \quad (3.3)$$

其中 $\nabla_s \cdot (\cdot)$ 表示表面散度算子。由此将积分形式的力平衡转化为局部形式

$$\nabla_s \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{p} = 0 \quad (3.4)$$

在典型的薄膜问题中，外部载荷通常假设为纯法向压力，即 $\mathbf{p} = p\mathbf{n}$ ，其在薄膜表面切向分量为零；而表面张力为常数，其梯度沿膜面方向为零，因此面内平衡只由弹性面内应力 \mathbf{N} 决定，即

$$(\nabla_s \cdot \mathbf{N})_{\parallel} = 0 \quad (3.5)$$

该方程即为弹性张力与常数表面张力耦合的薄膜面内平衡方程。法向平衡由薄膜曲率引入，写作

$$p = -\mathbf{n} \cdot (\nabla_s \cdot \boldsymbol{\tau}) = -\mathbf{n} \cdot (\nabla_s \cdot \mathbf{N} + \gamma \nabla_s \cdot \mathbf{I}_s) \quad (3.6)$$

根据曲面微分几何的恒等式^[137]，对于曲面投影算子 \mathbf{I}_s 和曲率张量 $\boldsymbol{\kappa} = -\nabla_s \mathbf{n}$ 有

$$\nabla_s \cdot \mathbf{I}_s = 2H\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot (\nabla_s \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{N} : \boldsymbol{\kappa} \quad (3.7)$$

其中 H 是曲面平均曲率，满足 $H = \text{tr}(\boldsymbol{\kappa})/2$ 。结合方程(3.7)，方程(3.4)可改写为

$$\mathbf{N} : \boldsymbol{\kappa} + 2\gamma H + p = 0 \quad (3.8)$$

该方程即为弹性张力与常数表面张力耦合的薄膜面外平衡方程。

上述过程建立了任意形状薄膜在弹性张力与表面张力耦合作用下的平衡方程。对应于实验条件，本小节具体讨论轴对称薄膜的接触问题。建立力学模型如图3.7所示，圆形薄膜在固定端 R_f 处承受均匀预张力 T ，压头可以建模为半径 R_s 的刚性球体。

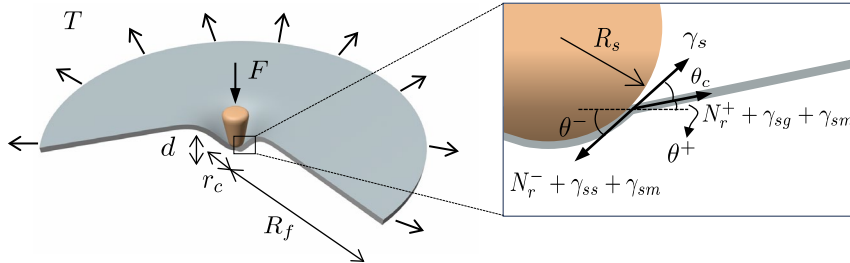


图 3.7 刚性球体-弹性薄膜压痕模型示意图，插图给出了接触线处的薄膜张力、刚性球体表面张力及变形角度的关系

在接触线 $r = r_c$ 以外的区域，薄膜可以自由变形，其力学平衡由式(3.5)与(3.8)所描述的面内与面外平衡方程共同决定。具体地，基于无矩薄膜理论对变形进行描述，其应变位移关系和线弹性本构关系分别见于方程(2.4)和(2.5)。在小斜率假设 $w' \ll 1$ 下，薄膜的主曲率可近似写为

$$\kappa_r = d^2w/dr^2, \quad \kappa_\theta = dw/(rdr) \quad (3.9)$$

将方程(2.5)和(3.9)代入方程(3.5)和(3.8)，得到薄膜非接触区域 $r_c < r < R_f$ 的面内平衡方程

$$N_\theta - \frac{d}{dr}(rN_r) = 0 \quad (3.10)$$

及面外平衡方程

$$(N_r + \gamma_{sg} + \gamma_{sm})\kappa_r + (N_\theta + \gamma_{sg} + \gamma_{sm})\kappa_\theta + p = 0 \quad (3.11)$$

上式中, γ_{sg} 和 γ_{sm} 分别为薄膜-气体界面和薄膜-介质界面的表面张力, 介质类型与实验条件相对应; 特别地, 对于悬浮薄膜, 非接触区域的横向外荷载满足 $p = 0$ 。

对于接触区域 $0 < r < r_c$, 考虑刚性球体与薄膜的共形接触, 薄膜的面外变形由球体几何形状决定, 即

$$z(r) = z_s(r) \approx d - \frac{r^2}{2R_s} \quad (3.12)$$

上式中 $z_s(r)$ 为压头形状函数, d 为中心压痕深度, R_s 为球体半径, 以垂直向下的压痕方向为正方向。由于常数表面张力不参与面内平衡, 接触区域的面内平衡方程与(3.10)完全一致。

在接触问题中, 接触线关系是连接整个薄膜域的解的重要条件。在本小节所考虑的压痕模型中, 刚性球体与薄膜之间的接触半径 r_c 并非预设参数, 而是通过接触线处的力学平衡自洽确定。对接触半径施加微小摄动 dr_c , 对应接触线沿刚性球体表面发生切向虚位移 $ds \sim dr_c$ 。根据虚功原理, 接触线在该虚位移下的总虚功应为零, 即

$$\delta W_{\text{membrane}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (3.13)$$

其中 $\delta W_{\text{membrane}}$ 为薄膜弹性与界面张力对接触线虚位移所做的功, δW_{ext} 为外力在该虚位移下的功, 二者的具体表达为

$$\delta W_{\text{membrane}} = -2\pi r_c (N_r^- + \gamma_{ss} + \gamma_{sm}) dr_c + 2\pi r_c (N_r^+ + \gamma_{sg} + \gamma_{sm}) \cos \theta_c dr_c + 2\pi r_c \gamma_s dr_c \quad (3.14)$$

和

$$\delta W_{\text{ext}} = F \delta d(r_c) \quad (3.15)$$

以上计算中, N_r^- 和 N_r^+ 分别为接触线内外两侧的薄膜径向拉伸张力, γ_{ss} 为薄膜-刚性球体接触界面的表面张力, γ_s 为刚性球体的表面张力, θ_c 为刚性球与薄膜之间的接触角, 如图3.7所示。

由于外力作用点随接触线位置摄动引起的位移可忽略, 因此 $\delta W_{\text{ext}} \approx 0$ 。平衡条件要求总虚功为零, 从而得到接触线处的切向力平衡:

$$(N_r^+ + \gamma_{sg} + \gamma_{sm}) \cos \theta_c - (N_r^- + \gamma_{ss} + \gamma_{sm}) + \gamma_s = 0 \quad (3.16)$$

该条件表明, 接触线处所有沿界面的线张力在切向方向达到平衡, 其形式与 Young 型接触角关系结构一致。

在考虑常数表面张力的薄膜体系中, 径向薄膜张力 N_r 完全由薄膜应变产生, 与薄膜的几何变形梯度 u' 直接相关, 由于薄膜连续且无裂缝, 其内部应变传递是连续的, 因

此径向薄膜张力沿薄膜自然连续，即 $[[N_r]] = 0$ ， $[[\cdot]]$ 表示物理量在接触线两侧的跳跃。常数薄膜张力与径向应变无直接耦合，因此其不会改变薄膜张力的连续性。基于这一条件，方程(3.16)可改写为

$$(N_r^+ + \gamma_{sg} + \gamma_{sm})(1 - \cos \theta_c) = \gamma_{sg} + \gamma_s - \gamma_{ss} \quad (3.17)$$

根据几何关系，并在小应变及小转角假设下，有 $\theta_c = \theta^- - \theta^+ \approx [[z']]$ 及 $\cos \theta_c = 1 - \frac{1}{2}\theta_c^2 + O(\theta_c^4)$ ；结合两接触界面黏附能的概念

$$\Gamma_{ad} = \gamma_{sg} + \gamma_s - \gamma_{ss} \quad (3.18)$$

方程(3.17)可被改写为

$$[[z']] = \sqrt{2\Gamma_{ad}/(N_r^+ + \gamma_{sg} + \gamma_{sm})} \quad (3.19)$$

该式表明，在考虑黏附能的作用时，接触线处的薄膜变形存在一阶不连续性，该不连续性的幅值与刚性球-薄膜之间的黏附能呈正相关，而非接触区域的薄膜张力呈负相关。因此，黏附效应会决定薄膜变形接触线的局部几何形态。

3.3.2 基于平衡方程的标度率分析

将变形平衡方程(3.10)、(3.11)与量纲分析相结合，以得到薄膜压痕模型的变形标度率。在压痕初期，变形较小时，薄膜中的径向应力和环向应力均由器件制造过程中引入的预应力 T 决定，有

$$N_r = N_\theta = T \quad (3.20)$$

与此同时，在小变形阶段，薄膜的径向及环向曲率可通过几何关系直接估计。对于半径 R_f ，中心挠度为 d 的薄膜，其变形轮廓的局部斜率 ϕ 满足 $\phi \sim dz/dr \sim d/R_f$ ，相应的弧长坐标可近似为 $ds \simeq dr$ ，基于这些几何近似及变形曲率的物理意义，径向曲率和环向曲率可分别表示为

$$\begin{aligned} \kappa_r &= d\phi/ds \sim d/R_f^2 \\ \kappa_\theta &= \sin \phi/r \simeq \phi/r \sim (d/R_f)/R_f = d/R_f^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

由此可见，在小变形阶段，两主曲率具有相同的量纲标度。将上述薄膜张力及变形的估计代入平衡方程(3.11)，可得外力与中心挠度之间的线性关系

$$F \propto (T + \gamma_{sg} + \gamma_{sm})d \quad (3.22)$$

上式推导中应用了压强与外力的标度关系 $F \sim p \cdot R_f^2$ 。该关系表明，非接触区域的表面张力与预张力存在一致的作用机制，其通过改变有效面内张力直接影响薄膜在小变形阶段的力学响应。基于这一认识，实验中观测到的氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面力学响应的差异，很可能主要来源于两种界面表面张力的不同。

而在较大的压痕深度下，薄膜会经历显著拉伸，膜的受力状态表现出显著的几何非线性^[131,135]。此时薄膜在径向和环向的应变大致相等，并且可以通过几何关系估算为

$$\varepsilon_r \sim \varepsilon_\theta \sim (d/R_f)^2 \quad (3.23)$$

通过线弹性能量表达式可以得到薄膜的拉伸能

$$U_{\text{elastic}} \sim Y\varepsilon^2 \cdot R_f^2 \sim Y \frac{d^4}{R_f^2} \quad (3.24)$$

而压痕力对应于拉伸能对位移的导数，由此得到经典的立方关系：

$$F \propto \frac{Y}{R_f^2} d^3 \quad (3.25)$$

该关系表明，在大变形区间，薄膜的力学响应主要由其面内拉伸刚度 Y 决定，而界面差异或曲率贡献的影响相对次要。实验中，氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的力-位移曲线在对数坐标下趋于重合，进一步说明介质交换并未改变薄膜的固有面内刚度。因此，可通过拟合大变形阶段的力-位移曲线，直接得到薄膜的面内刚度。

上述分析结果在标度意义上与实验结果保持一致，并为后续的数值拟合及机理分析提供了物理依据。然而，已有研究表明，即便在上述小变形区间内，压痕诱导的应变也可能导致薄膜力学响应包含对数型的弱非线性修正^[138]。此外，小变形下的线性主导阶段与大变形下的强非线性阶段并非在某一临界点发生突变，而是通过一有限的过渡区间实现平滑过渡。基于此，我们进一步对完整的非线性边值问题进行了直接的数值求解，以获得定量的力学响应。

3.3.3 无量纲化与数值求解

为明确薄膜-刚性球体系的物理约束，需要先说明几何对称性和自然边界条件。对于轴对称接触变形，这些边界条件包括：

(i) 原点 $r = 0$ 处的轴对称条件

$$z'(0) = 0, \quad u(0) = 0 \quad (3.26)$$

(ii) 接触线 $r = r_c$ 处的变形连续性条件

$$[[z]] = [[u]] = 0 \quad (3.27)$$

(iii) 固定端 $r = R_f$ 的夹持边界条件

$$u(R_f) = u_f, \quad z(R_f) = 0 \quad (3.28)$$

上式中预拉伸 u_f 的物理来源是薄膜在制造过程中引入的预应力或残余应力 T ，即 $u_f = (1 - \nu)R_f T/Y$ 。

为方便求解，引入应力函数 Φ ，对应的薄膜张力可表示为 $N_r = \Phi/r$ 和 $N_\theta = d\Phi/dr$ ，

应力函数需满足方程(2.18)所给出的相容条件。

在线性弹性假设下，薄膜拉伸刚度 Y 通常为固定值，而薄膜固定端半径 R_f 由实验中通孔的尺寸决定，因此采用这两个量对变量进行无量纲化处理：

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{z}{R_f}, \Delta = \frac{d}{R_f}, \rho = \frac{r}{R_f}, \bar{R}_s = \frac{R_s}{R_f}, \bar{u} = \frac{u}{R_f} \\ \bar{T} &= \frac{T}{Y}, \bar{\gamma}_{sg} = \frac{\gamma_{sg}}{Y}, \bar{\gamma}_{sm} = \frac{\gamma_{sm}}{Y}, \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{YR_f}, \bar{F} = \frac{F}{YR_f}\end{aligned}\quad (3.29)$$

由此得到非接触区域的无量纲控制方程为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\bar{\Phi} \frac{d\zeta}{d\rho} \right) + (\bar{\gamma}_{sg} + \bar{\gamma}_{sm}) \left(\frac{d^2\zeta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\zeta}{d\rho} \right) = 0 \quad (3.30)$$

及

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \bar{\Phi}) \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{d\rho} \right)^2 \quad (3.31)$$

在接触区域 $0 < \rho < \rho_c$ ，基于共形接触条件，薄膜变形挠度 $\zeta(\rho)$ 为已知，只需数值求解应力函数 $\bar{\Phi}(\rho)$ 。在非接触区域，位移场与应力场均需要求解得到，因此整个控制方程体系需要六个边界条件，分别是：

$$\begin{aligned}\bar{u}(0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{d\bar{\Phi}}{d\rho} \rho - \nu \bar{\Phi} \right) = 0 \\ \llbracket \bar{\Phi} \rrbracket &= 0, \llbracket \frac{d\bar{\Phi}}{d\rho} \rrbracket = 0, \llbracket \zeta' \rrbracket = \sqrt{\frac{2\bar{\Gamma}_{ad}\rho_c}{\bar{\Phi}_c + (\bar{\gamma}_{sg} + \bar{\gamma}_{sm})\rho_c}} \\ \zeta(1) &= 0, \bar{u}(1) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \left(\frac{d\bar{\Phi}}{d\rho} \rho - \nu \bar{\Phi} \right) = (1 - \nu)\bar{T}\end{aligned}\quad (3.32)$$

上式中， $\bar{\Gamma}_{ad}$ 为无量纲化的黏附能。采用 MATLAB 中的 `bvp5c` 求解器对归一化后的模型问题进行数值求解，得到整个薄膜域的变形及应力场后，对应任意给定压痕深度 d ，压痕力可由式

$$\bar{F} = -2\pi \left[\bar{\Phi} \frac{d\zeta}{d\rho} + (\bar{\gamma}_{sg} + \bar{\gamma}_{sm}) \rho \frac{d\zeta}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=\rho_c^+} \quad (3.33)$$

计算得到，该表达式来源于在 $\rho = \rho_c^+$ 处对薄膜进行环向切割，并建立局部力平衡关系。

3.4 表界面效应分析及实验解释

3.4.1 界面黏附

根据第3.3.1小节的分析，水-石墨烯界面的软化现象极可能直接体现了氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的表面张力变化，该变化幅度可通过数值拟合进行量化。然而，研究表明，压头与薄膜之间的黏附作用会改变二者的初始接触状态^[139]，从而使基于压痕力-位移曲线的表面张力分析更加复杂。因此，首先结合数值结果对模型中黏附作用的

影响进行定量分析。

对于无黏附作用的刚性球体-薄膜接触问题，薄膜的变形轮廓保持平滑连续，如图3.8(a)上图所示。引入黏附效应后，根据方程(3.19)，薄膜的接触变形轮廓在接触线处会出现转角不连续的现象。结合接触区域的共形接触条件可以发现，当黏附能密度较大或压头尺寸较大时，黏附作用能够在零外力状态下促使薄膜与压头之间形成明显的初始接触面积，如图3.8(a)下图所示。该初始接触使薄膜在非接触区域发生反向变形，并在膜内引入额外的拉伸张力或预应力。这种黏附诱导的初始偏转使薄膜在小变形阶段表现出增强的等效刚度，增加了基于初始力-位移关系提取表面张力的难度。

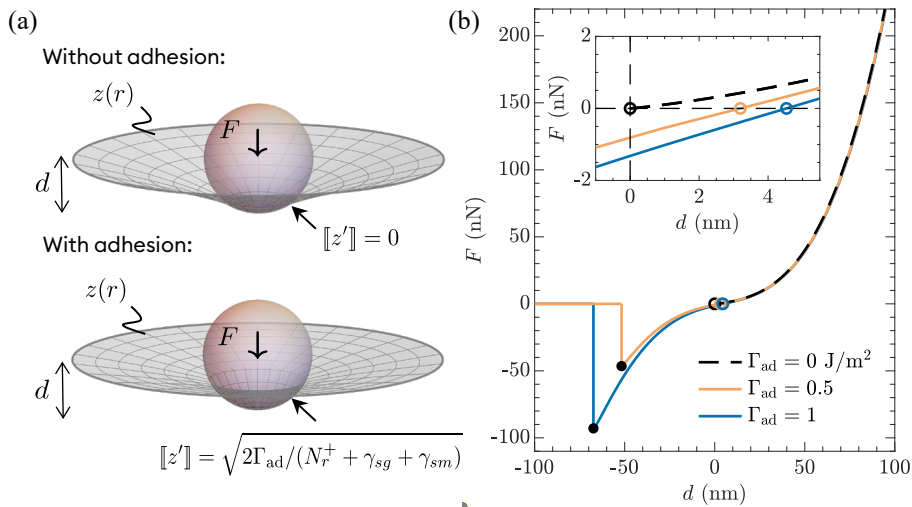


图 3.8 刚性球体-弹性薄膜压痕的黏附效应：(a) 无黏附/有黏附的薄膜变形形态对比；(b) 不同黏附能密度的压痕力-位移曲线数值结果，设置预张力 $T = 0.1 \text{ N/m}$ ，探针半径 $R_s = 30 \text{ nm}$ ，固定端半径 $R_f = 1200 \text{ nm}$ ，以及典型的石墨烯刚度 340 N/m

从压痕力-位移曲线的角度来看，在无黏附作用时，薄膜与刚性球体之间呈现典型的赫兹型接触行为，即零载荷对应零位移，如图3.8(b)中虚线所示。而存在黏附效应时，即使外力为零，接触线处由黏附引入的折点仍会导致微小的初始变形，如图3.8中彩色实线所示。数值结果表明，该黏附引起的初始变形与黏附能密度和压头半径呈正相关，当黏附能密度为 1 J/m^2 ，压头半径与薄膜半径的比率为 $240 \text{ nm}/1200 \text{ nm}$ 时，黏附引起的初始位移可达 35 nm 。上述分析表明，黏附效应与薄膜弹性响应之间存在明显的耦合作用。

实验中选择了较细的探针（ 30 nm 或 7 nm ），但接触的黏附能密度还需要进一步确定。图3.9展示了一组完整的加卸载力-位移曲线，图中实线箭头和虚线箭头分别指示压痕和卸载过程。在加载和卸载过程中，水-石墨烯界面均出现了明显且稳定的软化现象。实验中，将 AFM 悬臂杆固定于薄膜中心正上方并逐渐靠近薄膜，当吸引力梯度超过探针悬臂刚度时，探针尖端首先跳跃接触薄膜，随后继续推进使薄膜产生更大的变形。在卸载阶段，外力线性释放并转为负值，直至悬臂弹性力超过临界黏附力，该临界点被称

为脱粘点，如图3.9(a)所示，该点对应的压痕力为脱粘力 F_c 。图中，压痕曲线与卸载曲线的斜率差异源于压电扫描台的滞后效应。

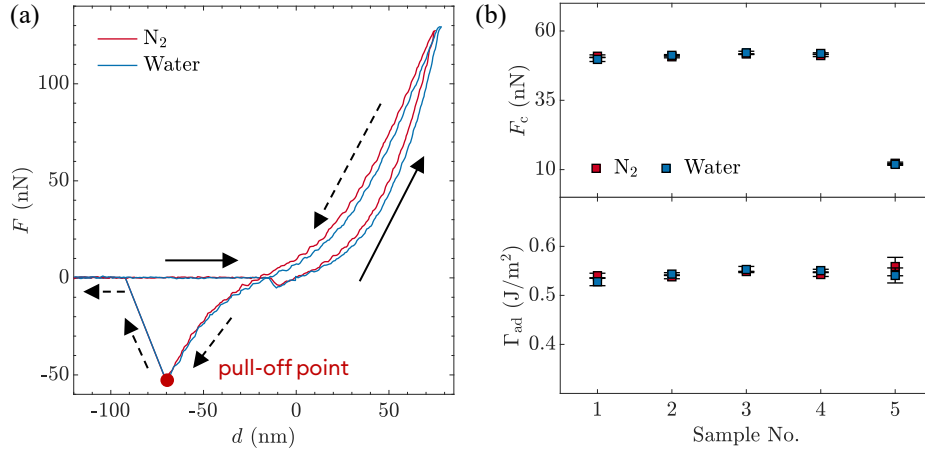


图 3.9 刚性球体-弹性薄膜压痕实验中的黏附效应：(a) 同一样品的压痕-卸载全过程力-位移曲线；(b) 不同样品与探针接触的脱粘力（上图）及根据公式(3.34)所计算的黏附能（下图）

图3.9(b)统计了不同样品与探针间的脱粘力。其中样品 1-4 的固定半径为 1200 nm，所使用的探针半径为 30 nm，样品 5 的固定半径为 1000 nm，探针半径为 7 nm。对于满足线弹性、小变形假设的薄膜，其与刚体接触的黏附能可以通过下式计算^[40]：

$$\Gamma_{\text{ad}} = F_c / (\pi R_s) \quad (3.34)$$

据此可以计算出氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的黏附能，二者均为 $\sim 0.5 \text{ J/m}^2$ ，如图3.9(b)所示。对于半径为 30 nm 的探针，该量级的黏附能引起的初始变形仅有 3 nm，对应压痕力-位移曲线与零黏附能的情况几乎完全重合，如图3.8(b)所示；而对于探针半径为 7 nm 的情况，因接触面积有限，黏附能对力-位移曲线的影响更加微弱。因此，在本实验条件下解释石墨烯-水界面的压痕软化力学行为时，可不考虑黏附影响。

3.4.2 表面张力

基于上述分析，应用方程(3.11)所描述的弹性毛细模型来拟合并解释氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的压痕实验结果。该数值模型仅涉及两个拟合参数：预应力与表面张力叠加构成的总张力 $\tau_0 = T + \gamma_{\text{sg}} + \gamma_{\text{sm}}$ ，其主要决定浅压痕阶段的力学响应，以及石墨烯面内刚度 Y ，其主导深压痕阶段的力学行为。对于同一组样品，当接触介质由氮气更换为水时，石墨烯的面内刚度保持不变，这与其内在物理性质相符，也与实验曲线在深压痕区域的平行特征一致；总张力 τ_0 则会随介质的切换而变化。通过调整这两个参数对实验力-位移曲线进行拟合，图3.10(a)展示了一组代表性拟合曲线。拟合得到石墨烯面内刚度分布在 250~330 N/m 范围内（图3.10(b)），总张力 τ_0 在 100.5~243.5 mJ/m² 的区间内变化。对于承受预张力及表面张力的薄膜，总张力 τ_0 的绝对数值仅表征其在

面外荷载作用下的等效张力水平，而氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的 τ_0 相对变化则反映了两种界面间的表面能差异

$$\Delta\gamma = \gamma_{sg} - \gamma_{sl} \quad (3.35)$$

其中 γ_{sg} 与 γ_{sl} 分别表示气体（氮气）-石墨烯与液体（水）-石墨烯界面的表面能。拟合得到该表面能差值在 $48.9 \sim 57.3 \text{ mJ/m}^2$ 的范围内浮动，如图3.10(b)。

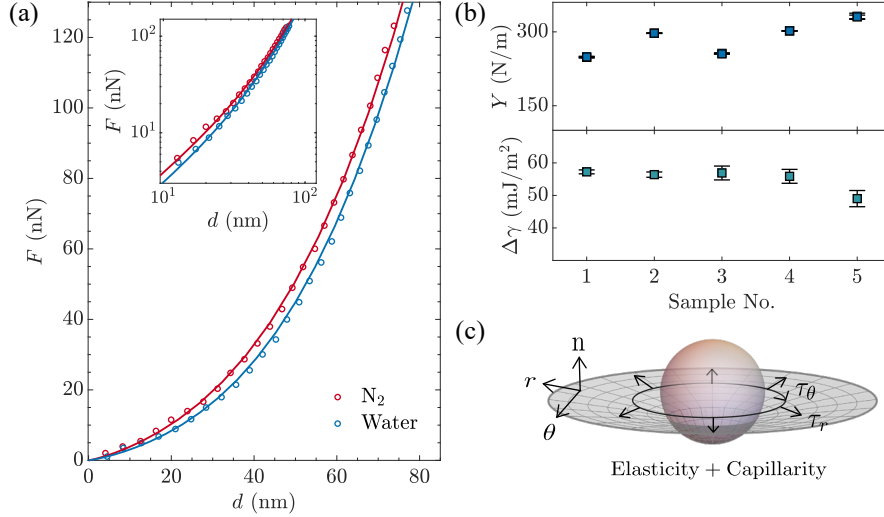


图 3.10 通过压痕实验表征表面能差值：(a) 压痕力-位移曲线拟合。散点和实线分别代表实验数据与数值拟合曲线；(b) 五组石墨烯样品的拟合面内刚度及对应表面能差值。样品 1-4：探针半径 30 nm，固定端半径 1200 nm；样品 5：探针半径 7 nm，固定端半径 1000 nm；(c) 表面弹性-体弹性薄膜的变形及张力示意图

需要指出的是，在上述分析中并没有考虑薄膜表面能与表面张力的差异。理论上，固体材料的表面能通过 Shuttleworth 效应^[34] 依赖于面内应变 ϵ ，基于此，轴对称条件下薄膜的弹性毛细方程可以更一般地表示为

$$\tau_r \kappa_r + \tau_\theta \kappa_\theta + p = 0 \quad (3.36)$$

其中 $\tau_r = N_r + \Upsilon_r^{sg} + \Upsilon_r^{sm}$ 和 $\tau_\theta = N_\theta + \Upsilon_\theta^{sg} + \Upsilon_\theta^{sm}$ 分别为径向和环向的有效薄膜张力分量，如图3.10(c)所示。应变依赖的表面张力 Υ_r and Υ_θ 满足表面本构关系^[45,141-143]

$$\Upsilon_r = \Upsilon_0 + (\lambda^s + 2\mu^s)\epsilon_r + \lambda^s\epsilon_\theta, \Upsilon_\theta = \Upsilon_0 + (\lambda^s + 2\mu^s)\epsilon_\theta + \lambda^s\epsilon_r \quad (3.37)$$

其中 Υ_0 表示零应变状态下的表面张力，对于大多数固体材料，其数值通常等于对应状态的常数表面能^[36]，这为本小节的拟合分析中将表面能视为常量提供了依据。表面 Lamé 常数 λ^s 和 μ^s 描述了表面张力对应变的敏感性，但目前尚无文献给出对应于石墨烯的精确值。在实验中，石墨烯经历浅压痕到深压痕的阶段，应变范围分别为 $(d/R_f)^2 \ll O(10^{-3})$ 和 $(d/R_f)^2 \lesssim O(10^{-3})$ ，拉伸实验表明，该应变程度下，表面效应对石墨烯弹性性质的影响可忽略^[144]。此外，本章表征对象为氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的表

面张力差值，实验中，两界面应变差值仅为 $O(10^{-5})$ ，即便石墨烯的表面弹性模量达到与体弹性模量同量级，应变依赖项对应的张力差值仍可忽略不计。后续第五章中以超弹性大变形薄膜为研究对象，详细讨论应变依赖的表面能对薄膜接触问题的影响。

基于方程(3.35)得到的表面能差值 $\Delta\gamma$ 可进一步用于材料润湿性的分析。润湿接触角 (Water Contact Angle, WCA) 是表征材料表面润湿性最直接的物理量之一，定义为液滴在材料表面自由铺展并达到热力学平衡状态时，三相接触线处液气界面与固体表面之间的夹角，其满足杨氏关系^[37]

$$\cos(\text{WCA}) = \Delta\gamma/\gamma_g \quad (3.38)$$

上式中 γ_g 是液气界面的表面张力。将图3.10(b) 中的 $\Delta\gamma$ 代入上式，得到通过氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的压痕实验所测得的润湿角为 $37.3^\circ \sim 47.2^\circ$ 。

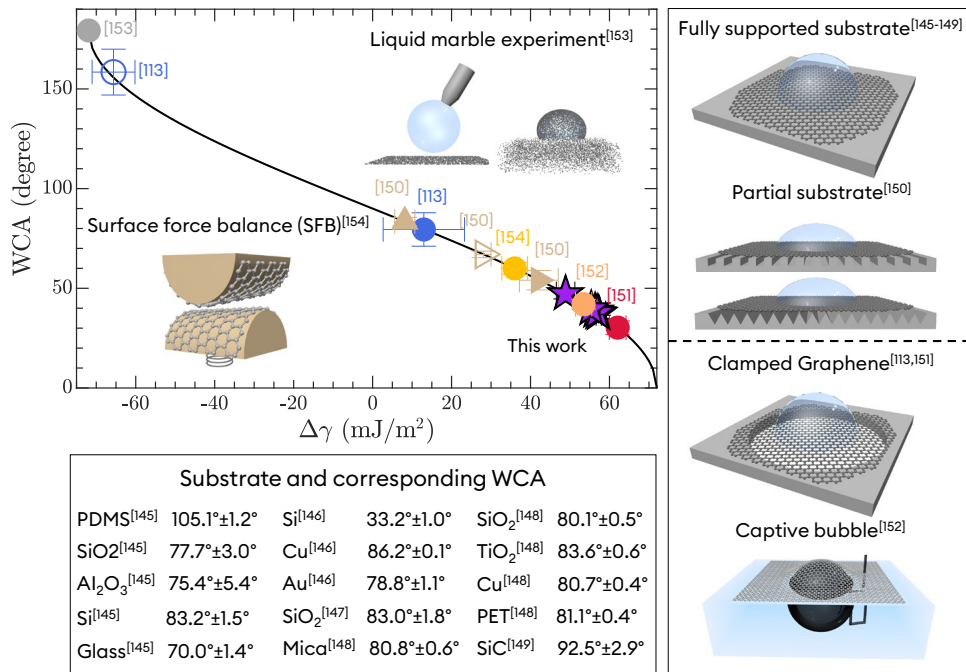


图 3.11 不同实验方法测得的表面能差值与接触角。对于直接测量润湿接触角的文献，对应表面能差值通过方程(3.38)计算

在现有研究中，石墨烯润湿性的表征方法主要可分为三类：

- (i) 基底支撑石墨烯的接触角测量方法^[145-150]；
- (ii) 悬浮石墨烯的接触角测量方法，例如夹持式悬浮薄膜法^[113,151] 或俘泡法^[152]；
- (iii) 接触角的间接测量方法，包括吸附实验（如液体弹珠^[153]）以及表面能测量方法（如表面力平衡仪^[154]）等。

其中，基底材料及其几何形貌的差异会引入显著的基底效应，使得方法 (i) 测得的石墨烯接触角在不同研究中表现出较大的离散性。相比之下，上述基于压痕实验获得的测量结果与悬浮石墨烯体系中的测量结果具有良好一致性，如图3.11所示。

综合以上内容，本小节基于真实实验场景，在无矩薄膜理论框架下建立了含表面张力的薄膜-刚性球体压痕模型，理论与数值计算结果显示，二者的界面黏附作用会使压痕力-位移曲线出现初始变形，但本实验条件下作用可忽略；而表面张力的作用可直接影响薄膜总张力，在小变形阶段显著改变力-位移曲线。通过该模型可以有效解释实验中观察到的水-石墨烯界面软化现象。此外，薄膜压痕实验中还涉及到薄膜下陷、弯曲效应等因素的影响，且面外加载的弹性毛细效应实验还可延伸到其他形式。基于此，接下来对薄膜的弹性毛细理论进行进一步讨论和推广。

3.5 弹性毛细效应的补充分析与实验拓展

3.5.1 薄膜弯曲效应

薄膜在发生面外变形时通常会伴随弯曲效应的影响。为刻画这一效应，在 FvK 框架下对压痕模型中的弯曲作用进行分析。考虑弯曲刚度时，薄膜接触区域仍满足共形接触条件，本小节将该条件直接写入能量泛函，而非接触区域的力学平衡则由弯曲、拉伸及表面张力等效效应共同决定，并通过能量变分方法进行分析。整个薄膜域上的总自由能可表示为

$$\Pi = U_{\text{bending}} + U_{\text{stretch}} + U_{\text{surface}} - 2\pi p \int_0^{R_f} z(r)rdr \quad (3.39)$$

其中， U_{bending} 和 U_{stretch} 分别是薄膜的弯曲能量和拉伸能量，在 FvK 薄膜理论框架下，其计算形式分别与(2.2)和(2.3)相一致；总自由能表达式的最后一项对应薄膜附加横向荷载的作用，上述三项中，接触区域的面外变形 $z(r)$ 直接通过(3.12)计算。 U_{surface} 为压痕体系表面能，可表示为各区域表面能的叠加

$$\begin{aligned} U_{\text{surface}} = & \gamma_s \left(4\pi R_s^2 - \int_0^{r_c} 2\pi r \sqrt{1+z'^2} dr \right) + (\gamma_{ss} + \gamma_{sm}) \int_0^{r_c} 2\pi r \sqrt{1+z'^2} dr \\ & + (\gamma_{sv} + \gamma_{sm}) \int_{r_c}^{R_f} 2\pi r \sqrt{1+z'^2} dr \end{aligned} \quad (3.40)$$

需要指出，该方程中 $(0, r_c)$ 积分域上面外变形为已知。

结合动接触线条件 $\delta r_c \neq 0$ 与能量最小化条件 $\delta \Pi = 0$ 可得到体系的平衡方程和边界条件。根据变分法则，能量变分可表示为

$$\delta \Pi = 2\pi \int_0^{r_c^-} L_1(r, u, u') dr + 2\pi \int_{r_c^+}^{R_f} L_2(r, u, u', z, z') dr \quad (3.41)$$

其中 L_1 和 L_2 分别为接触区域和非接触区域的加权能量密度。变分仍可通过方程(2.10)计算，但需要结合接触线共形接触所带来的几何条件

$$\delta z^- = \delta z^+ = z'^- \delta r_c, \quad \delta z'^- = \delta z'^+ = z''^- \delta r_c \quad (3.42)$$

其中，上标 $-/+$ 分别代表接触线左侧与右侧的物理量，例如， $z^- = z(r_c^-)$ 。结合方

程(2.10)和(3.42)得到考虑弯曲时接触线处的变形跳跃条件

$$[[z'']] = \sqrt{2\Gamma_{ad}/B} \quad (3.43)$$

其中, B 为薄膜的弯曲刚度。该条件说明, 对于 FvK 薄膜, 黏附会引起接触线处变形曲率的跳跃性, 这种黏附效应通过弯曲刚度平衡。

除此之外, 接触线处面内拉伸的变分项 $\delta u^- = \delta u^+ = \delta u_c \neq 0$ 对应径向拉伸张力的连续性条件, 结合 FvK 框架下的应力应变关系, 还可得到环向拉伸张力的连续性条件。

考虑弯曲的薄膜平衡方程同样通过能量变分得到, 其中, 非接触区域的面外平衡方程可表示为

$$B\nabla^2\nabla^2 z - (N_r + \gamma_{sv} + \gamma_{sm})\kappa_r - (N_\theta + \gamma_{sv} + \gamma_{sm})\kappa_\theta - p(r) = 0 \quad (3.44)$$

为方便数值求解, 上式中的拉伸应力仍可通过应力函数 Φ 来表示, 对应关系如方程(2.16)所示, 应力函数所需满足的相容方程(2.18)构成体系的另一个控制方程。

接下来, 为了得到考虑弯曲刚度的压痕力-位移曲线, 需要对非接触区域的应力及位移场进行求解。此时边界值问题体系包括一个四阶方程和一个二阶方程, 需要六个边界条件。在接触线处, 除黏附能引起的曲率跳跃条件(3.43)外, 转角的连续性条件

$$[[z']] = 0 \quad (3.45)$$

可作为求解条件之一, 根据接触区域的面外变形表达式, 其可进一步写为

$$z'(r_c^+) + \frac{r_c}{R_s} = 0 \quad (3.46)$$

接触线处的第三个边界条件由薄膜张力的连续性给出, 但需要通过接触区域的共形接触特点对其进行预处理。将接触区域面外变形函数代入相容方程, 根据轴对称条件 $z'(0) = 0$ 及 $N_r(0) = N_\theta(0)$, 得到

$$\Phi = -\frac{Y}{16R_s^2}(r^3 - r_c^2 r) + \frac{\Phi_c r}{r_c} \quad (3.47)$$

其中 Φ_c 为接触线处的应力函数值, 上式应用了接触线处径向张力的连续性条件 $\Phi^- = \Phi^+ = \Phi_c$ 。将方程(3.47)进一步代入环向张力的连续性条件 $\Phi'^- = \Phi'^+$, 得到

$$\frac{\Phi(r_c^+)}{r_c} - \Phi'(r_c^+) - \frac{Yr_c^2}{8R_s^2} = 0 \quad (3.48)$$

方程(3.43)、(3.46)和(3.48)结合固定端边界条件

$$z(R_f) = 0, z'(R_f) = 0, u(R_f) = \lim_{r \rightarrow R_f} \left(\frac{d\Phi}{dr} r - \nu\Phi \right) = (1 - \nu)R_f T / Y \quad (3.49)$$

构成该问题求解所需的全部边界条件。对非接触区域的物理量进行求解后, 考虑弯曲刚度的压痕力可通过

$$F = 2\pi r_c \left[B \frac{d}{dr} (\nabla^2 z) - (N_r + \gamma_{sv} + \gamma_{sl}) \frac{dz}{dr} \right] \Big|_{r=r_c^+} \quad (3.50)$$

计算，结合接触区域的面外变形函数(3.12)得到考虑弯曲刚度的压痕力-位移关系。

在 FvK 框架下，弯曲刚度通常通过 $B = Et^3/12(1 - \nu^2)$ 计算，在求解中，利用拉伸刚度 Y 和固定端半径 R_f 进行无量纲化，对应无量纲弯曲刚度 $\bar{B} = B/(YR_f^2)$ 。对应于本章的压痕实验，所选用的材料为单层石墨烯，其厚度为 0.34 nm ，实验设置固定端半径 $R_f \sim 1000 \text{ nm}$ ，由此得到 $\bar{B} < 10^{-8}$ 。该弯曲刚度对薄膜压痕力-位移曲线的影响如图3.12所示，其中固定端半径、压头半径、薄膜预张力等计算条件参照实验条件设定。由图可知，不论在压头半径为 30 nm 或 7 nm 的情况下， $\bar{B} = 10^{-8}$ 的弯曲刚度都不会影响到压痕力-位移曲线，仅对脱粘力的预测有所影响，但本实验对薄膜弹性毛细效应的讨论基于压痕段曲线，因此结果不受弯曲效应的影响。

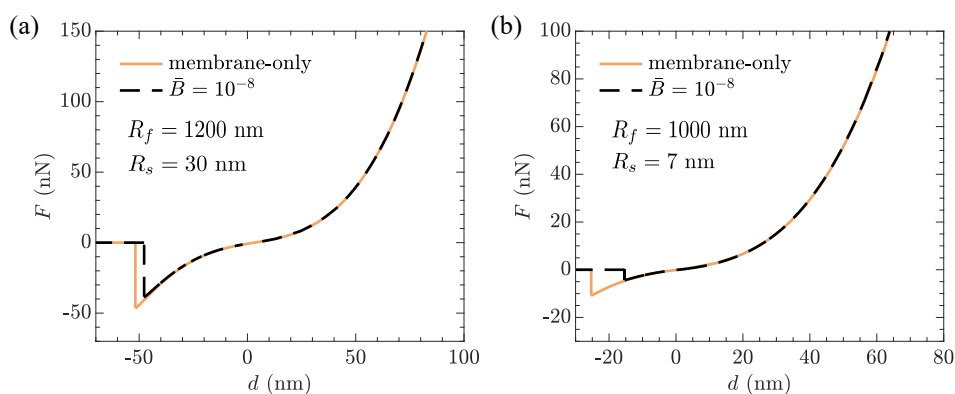


图 3.12 弯曲效应对薄膜压痕力-位移曲线的影响：(a) 压头半径为 30 nm ；(b) 压头半径为 7 nm 。两组计算中均设置 $\Gamma_{\text{ad}} = 0.5 \text{ J/m}^2$ ， $\tau_0 = 0.1 \text{ N/m}$

基于第一性原理模拟或实验测量的单层石墨烯薄膜弯曲刚度约为 $1.2 \sim 1.7 \text{ eV}^{[155-156]}$ ，远小于 FvK 理论所预测的弯曲刚度，因此，通过压痕实验对单层石墨烯薄膜表面张力进行分析时，采用无矩薄膜理论即可。

3.5.2 薄膜下陷行为

覆盖在通孔上的悬浮石墨烯薄膜下陷现象在实验中十分普遍^[157-158]。将薄膜材料转移至通孔上方后，薄膜与孔壁或孔口边缘之间存在吸引性的范德华相互作用，该相互作用相当于对悬浮薄膜施加一个指向基底方向的分布载荷，从而使石墨烯产生向下挠曲，形成实验中常见的下陷形貌。在第3.2节的实验中，通过超临界干燥石墨烯以抑制该现象，并严格控制了注水后界面的高度，以保证介质变换过程中边界条件的一致性。实验测试样品的氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的初始高度差异不超过 4 nm ，相较于薄膜固定半径 $\geq 1000 \text{ nm}$ ，该下陷尺度近乎可以忽略。

为进一步精确确定下陷效应的影响，在无矩薄膜理论的面外平衡方程中引入范德华力作用 q_{vdW} 对薄膜的下陷位移进行模拟， q_{vdW} 在计算中具体描述为 \tanh 平滑阶跃

函数

$$q_{\text{vdW}} = \frac{p_{\text{max}}}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{r - (R_f - l_{\text{vdW}})}{\zeta} \right) \right] \quad (3.51)$$

上式中, p_{max} 为等效范德华最大压力, l_{vdW} 为范德华力显著作用的影响长度, 如图3.13(a)所示, 本小节计算中取 $l_{\text{vdW}} = 0.05R_f$, ζ 为范德华作用的平滑长度, 用于控制范德华载荷从最大值向薄膜中心逐渐衰减至零的过渡范围, 本小节计算中取 $\zeta = 0.02R_f$ 。在评估薄膜下陷对力-位移曲线的影响时, 首先将方程(3.51)所示的范德华力作为唯一外荷载条件, 结合中心对称条件和固定端边界条件求解薄膜变形的边界值问题, 以对下陷高度进行拟合, 如图3.13(b)所示。该过程同时确定了方程(3.51)中 p_0 的取值。将对应的 q_{vdW} 代入第3.3.3节所给出的薄膜压痕模型求解体系, 数值求解以评估下陷作用对压痕力-位移曲线的影响。针对于下陷高度 4 nm 的实验组, 求解结果如图3.13(c)所示。可以看出, 在此最大下陷深度的情形下, 范德华力作用对压痕力-位移曲线的影响仍可忽略。

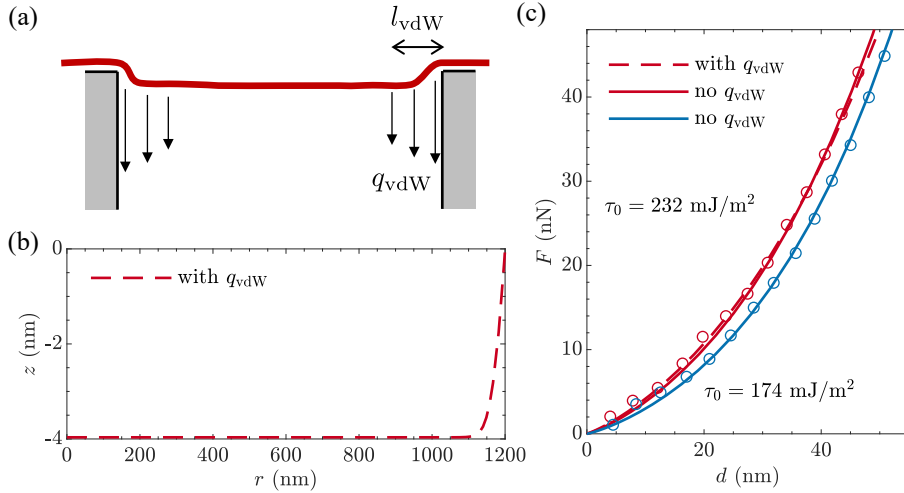


图 3.13 初始状态薄膜下陷效应的影响: (a) 薄膜下陷现象示意图; (b) 对下陷高度 ($\sim 4 \text{ nm}$) 的模拟; (c) 下陷效应对压痕力学响应的影响

3.5.3 弹性毛细效应鼓泡实验

根据第3.1节的讨论, 薄膜的面外变形还可通过鼓泡实验实现。本研究进一步进行了氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的鼓泡实验。实验仍在上述 $\text{SiN}_x\text{-Si-SiN}_x$ 基底上进行, 设置中央部位圆形通孔的半径 $R \sim 1500 \text{ nm}$, 石墨烯样品尺寸远大于通孔半径, 形成固定端边界条件。实验中通过 3D 打印容器隔绝外界湿度, 介质引入与界面构造同第3.2.1节中的步骤。界面形成后, 通过持续向反应池输入氮气使石墨烯鼓起高度 h , 通过外接气体传感器监控薄膜表面所受的实际气压数值。

根据实验场景建立鼓泡力学模型如图3.14(a)所示, R 和 h 分别为鼓泡固定端半径及鼓起高度。鼓泡全域满足控制方程(3.11), 此时 p 对应薄膜承受的实际气压值。求解

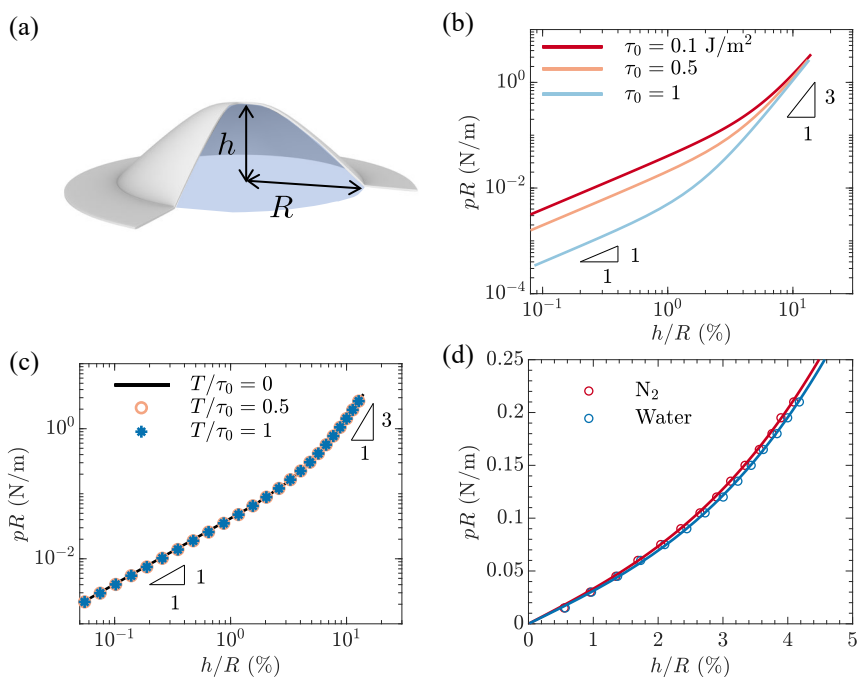


图 3.14 不同介质-石墨烯界面的鼓泡实验: (a) 鼓泡模型示意图; (b) 不同总薄膜张力作用下的力-位移数值求解结果; (c) 不同预张力/总薄膜张力比值作用下的力-位移数值求解结果; (d) 氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的实验结果拟合

该二阶方程及相容方程需要 4 个边界条件，分别来自于鼓泡中心的对称条件

$$z'(0) = 0, u(0) = 0 \quad (3.52)$$

及固定端条件

$$z(R) = 0, u(R) = u_0 \quad (3.53)$$

基于数值求解讨论薄膜在鼓泡实验中的力学响应。如图3.14(b)、(c)所示，薄膜的力-位移曲线在变形较小和较大的阶段分别满足线性关系和三次非线性关系，薄膜总张力 $\tau_0 = T + \gamma_{sv} + \gamma_{sm}$ 对薄膜力学行为的影响在线性区域体现，非线性区域则受到薄膜内在弹性模量的控制。表面张力 $\gamma_{sv} + \gamma_{sm}$ 与预张力 T 的作用机制一致。

通过调节薄膜总张力及薄膜的拉伸刚度 Y 对实验曲线进行数值拟合，如图3.14(d)所示。得到氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的张力差 $\Delta\gamma$ 约 51.3 mJ/m^2 ，对应润湿角 44.5° ，与压痕实验结果一致。

3.6 本章小结

基于对“受控边界条件下的面外加载可将薄膜弹性毛细效应转化为可测力学响应”这一思想的认识，本章设计了氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的纳米压痕实验。实验结果表明，水-石墨烯界面的力学响应比氮气-石墨烯界面更为柔软，这为界面能效应提

供了清晰的实验表征。

通过将压痕实验与考虑表面张力的压痕薄膜理论模型相结合，阐述了界面黏附和表面张力对薄膜变形的影响。基于数值解对实验结果进行拟合，提取了氮气-石墨烯界面与水-石墨烯界面的表面能差异，并进一步推断出石墨烯的润湿接触角。结果显示，石墨烯在原子尺度上仍表现出明显的亲水性。

此外，理论方面，本章还将弯曲刚度纳入压痕模型，通过数值计算证明了实验条件下其对弹性毛细效应的表征无影响；并利用范德华吸引作用对薄膜初始状态的下陷效应进行了模拟，说明了实验过程中的初始界面差异对结果无影响。在实验方面，本章还通过面外变形鼓泡实验对薄膜弹性毛细效应进行了表征，得到的石墨烯润湿角与压痕实验一致。

本章提出的方法确立了压痕技术作为一种多功能手段，可用于定量表征超薄材料的表面张力，并为更复杂的薄膜及异质结构中的表面弹性效应、润湿性调控以及界面物理现象研究提供了新的机遇。

第四章 非线性弹性薄膜的黏附理论

4.1 引言

薄膜材料广泛存在于自然界和工程应用中，涵盖从细胞、组织到黏附材料、电子器件等多种体系^[159-161]。在这些体系中，物体从薄膜表面剥离的过程与接触的建立同样普遍且重要^[120,162-163]。在日常生活中，人们通过揭开胶带感知其黏性；在建筑研究中，球体牵引并穿过肥皂膜的过程为轻质结构设计提供了启发^[164-165]；在物理学中，二维材料上的探针剥离实验为理解范德华相互作用提供了依据^[161,166]；在生物力学领域，对剥离力的测量加深了对细胞黏附机制的认识^[167-169]。这些现象背后的核心问题在于：将薄膜从物体上剥离需要多大的力？该临界力通常被称为脱粘力（pull-off force）。围绕薄膜脱粘力问题，目前研究最为成熟的一类情形是受压或充气薄膜与平面之间的黏附接触。相关研究已分别考虑了刚性基底^[69,130,170-175]、可变形基底^[176-177]以及包含几何大变形和材料非线性效应的情况^[97,178-181]。相比之下，当研究对象扩展至薄膜与球体或曲面之间的黏附接触时，相关研究仍相对有限，尤其缺乏对脱粘力特性的系统认识。已有研究在部分问题上的结论甚至存在一定差异，其主要原因在于分析中往往依赖于一些经验性假设。

Shanahan^[183]最早研究了这一问题，其假设膜张力为常数，并将球体形状近似为抛物面。Borodich 和 Galanov^[100]沿用了相同的假设与近似，首次给出了脱粘力的显式表达式 $F_c = \pi\Gamma_{ad}R_s$ ，其中 Γ_{ad} 为界面黏附能， R_s 为球体半径。随后，Ru^[184]基于能量方法推导了常数张力薄膜与弹性球体的黏附接触关系，验证了上述脱粘力。基于相同的常数张力假设，Yuan 和 Wang^[185]证明该脱粘力不依赖于薄膜弹性参数及尺寸^[186]。然而，Argatov^[101]在分析中采用球体的精确几何形状，指出当薄膜张力较小时，这一关系不再成立。进一步地，Yang 等人^[102]从解析角度证明，充气鼓起的超弹性薄膜与刚性球体间的脱粘力可调控。相比之下，Wang 等人^[182]和 Yu 等人^[140]的实验研究分别发现，在

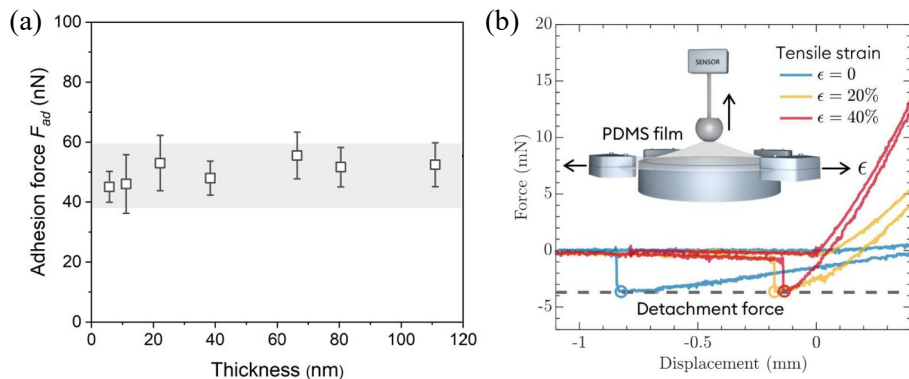


图 4.1 薄膜-球体脱粘实验：(a) 薄膜厚度对脱粘力的影响^[182]；(b) 预拉伸对脱粘力的影响^[140]

不同薄膜厚度和预拉伸条件下，薄膜与刚性球体之间的脱粘力基本保持稳定，分别如图4.1(a)和(b)所示。

本章旨在通过严格的能量变分分析，基于 Johnson-Kendall-Roberts (JKR) 黏附理论与 Griffith 断裂准则，建立刚性球体从圆形薄膜上剥离所需的能量条件及临界脱粘力。分析中考虑三类具有代表性的体系：其一为肥皂薄膜，该体系的薄膜张力由常数表面张力决定，但其变形行为具有显著的非线性特征；其二为无矩薄膜，薄膜材料遵循线弹性本构关系，但几何上考虑有限变形效应；其三为超弹性薄膜，其材料本构与变形行为均表现出高度非线性，在此基础上，考虑表面张力对剥离能量条件及脱粘力的影响。

本章的结构如下：第 2 节分析了肥皂薄膜与刚性球体之间的黏附接触，通过解析求解高度非线性的最小曲面方程，得到相应的力-位移曲线；第 3 节讨论了无矩薄膜与刚性球体之间的黏附接触，强调了在分析中对薄膜与球体几何非线性进行一致性处理的必要性；第 4 节采用超弹性薄膜模型，研究几何非线性与材料非线性之间的耦合作用，并探讨了恒定固体表面张力对脱粘行为的影响；第 5 节对薄膜与刚性球体的黏附接触进行了有限元仿真，讨论了不同预拉伸、黏附能及材料参数的影响；第 6 节总结了本工作的主要结论。

4.2 肥皂薄膜

本节讨论肥皂薄膜与刚性球体的黏附接触。肥皂薄膜的初始状态为无刚体接触的平坦状态，边界形状为圆形，固定在半径 R_f 处。真实实验场景中，刚性球体在外力作用下自薄膜下方穿过薄膜，并牵引其发生一定变形，如图4.2(a)所示。基于该场景建立脱粘状态的力学模型，如图4.2(b)所示。刚性球体半径为 R_s ，对于浓度均匀的肥皂液，接触过程中的变形可视为轴对称变形，记薄膜与刚性球体的接触半径为 $r = r_c$ ，接触角定义为接触线外侧薄膜变形切线方向与球体表面的夹角，记为 θ_c 。

在脱粘过程中，接触线 r_c 处的高度可以通过刚性球体的形状函数计算，即

$$z(r_c) = d + (R_s - \sqrt{R_s^2 - r_c^2}) \quad (4.1)$$

上式中， d 表示对称中心 $r = 0$ 处刚性球体的最低位置。在非接触区域 ($r_c \leq r \leq R_f$)，薄膜不受横向外载作用，仅在接触线处的黏附作用下发生变形；由于肥皂薄膜的密度低且表面积大，表面张力在其形成与平衡中起主导作用。对于表面张力恒定为 γ_{sv} 的肥皂薄膜，其形状可由最小曲面方程描述：

$$2\gamma_{sv} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad (4.2)$$

其中系数 2 来自于上下两个表面， $1/R_1$ 和 $1/R_2$ 表示轴对称肥皂薄膜变形的主曲率^[38]

$$\frac{1}{R_1} = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{z'}{r(1+z'^2)^{1/2}} \quad (4.3)$$

方程(4.3)中, $z' = dz/dr$ 。非接触区域薄膜变形需要满足边界条件

$$z'(r_c) = -\tan \theta, \quad z(R_f) = 0 \quad (4.4)$$

上式中, θ 是薄膜在接触线处的顺时针旋转角, 如图4.2(b)所示。

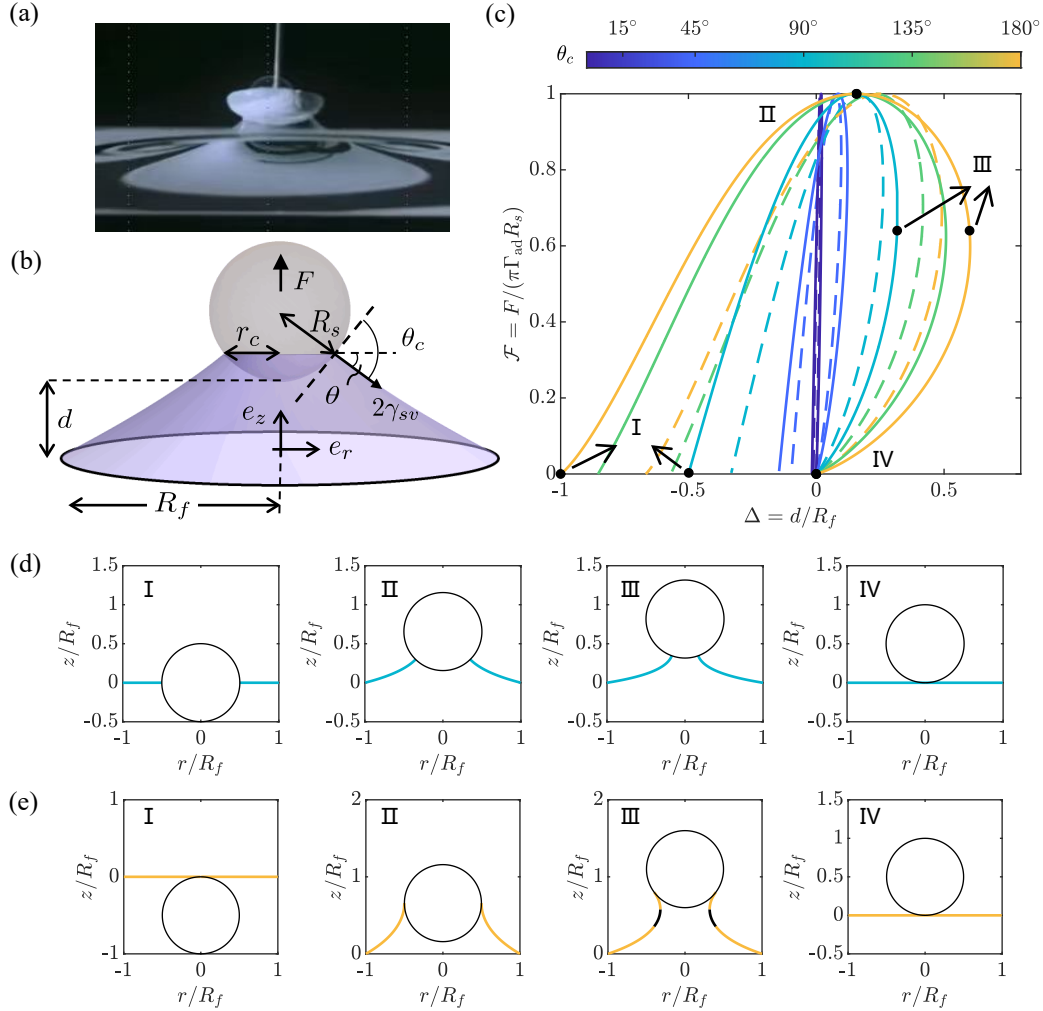


图 4.2 悬浮肥皂薄膜与刚性球体的黏附接触: (a) 肥皂薄膜剥离瞬间的摄影图像^[164]; (b) 刚性球体在外力作用下从肥皂薄膜上剥离的示意图及物理量标注; (c) 不同接触角 θ_c 下的无量纲力-位移关系, 实线对应 $R_s = R_f/2$, 虚线对应 $R_s = R_f/3$; (d, e) 对应于 $R_s = R_f/2$ 脱粘过程中不同阶段肥皂薄膜变形轮廓, 其中接触角 θ_c 分别为 90° 和 180°

结合最小曲面原理和边界条件(4.4), 对方程(4.2)积分两次^[183] 可得到非接触区域变形高度的解析解

$$z = r_c \sin \theta \left[\cosh^{-1} \left(\frac{R_f}{|r_c \sin \theta|} \right) \mp \cosh^{-1} \left(\frac{r}{|r_c \sin \theta|} \right) \right] \quad (4.5)$$

式中 \mp 来源于肥皂薄膜接触角度的变化, 当接触角 $\theta_c \leq 90^\circ$ 时取负号; 当 $90^\circ < \theta_c < 180^\circ$ 时, 脱粘过程中薄膜变形可能会出现背靠背的“双 c”结构, 如图4.2(e)所示, 在此情况下, $r \in (r_c \sin \theta, r_c)$ 区间内高度函数 $z(r)$ 对应两个取值, 分别通过正号和负号计算。

理论上肥皂薄膜可沿球体表面自由移动^[187]，但在准静态实验中，接触角通常会松弛至约 $\pi/2$ ，如图4.2(a)所示。不失一般性地，本小节考虑任意接触角 θ_c ，对于任意变形状态的接触半径 r_c ，结合接触线处的几何关系，薄膜旋转角 θ 可表示为

$$\theta = \theta_c - \arcsin \frac{r_c}{R_s} \quad (4.6)$$

结合方程(4.6)与(4.1)，对于任意球体位移 d ，肥皂薄膜的变形形态可以通过方程(4.5)确定，同时得到刚性球体从薄膜上拉脱所需要的脱粘力

$$F = 4\pi r_c \gamma_{sv} \sin \theta \quad (4.7)$$

该脱粘力表达式来源于在 $r = r_c^+$ 处进行环形切割后，切割线处所需满足的竖向力平衡。

以上是肥皂薄膜与刚性球体接触平衡的完整解析解答，在此基础上，为了进一步讨论接触线处的状态，可参照剥离问题中能量释放率的概念^[96,159] 定义肥皂薄膜与刚性球体接触线处的“界面黏附”：

$$\Gamma_{ad} = G = 2\gamma_{sv}(1 - \cos \theta_c) \quad (4.8)$$

该界面黏附表示表面张力通过几何耦合后，对接触线推进产生的等效热力学驱动力。需要强调的是，肥皂薄膜体系中并不存在严格定义的能量释放率，因为该体系中“裂纹扩展”的定义并不明确。采用式(4.8)的表达形式，目的在于形式上与考虑表面张力效应的固体薄膜模型保持一致，以便进行对比分析，该模型会在第4.3节进行讨论。

基于方程(4.5)和(4.8)，图4.2(c)给出了无量纲脱粘力与肥皂薄膜位移之间的计算关系。对于固定的接触角 θ_c ，系统存在两个零力平衡态，类似于肥皂薄膜的悬链面体系，仅有非平凡分支（图4.2(c)中的状态 I）是稳定的^[188]；在力控制加载条件下，解在状态 II 之后失去稳定性^[153]。图4.2(c)所示曲线的一个显著特征是：对于不同的接触角 θ_c 或不同的刚性球体与薄膜的相对尺度 R_s/R_f ，尽管具体的变形行为因上述界面黏附强弱或尺寸因素存在差异，最大（或临界）脱离力，即脱粘力，始终保持一致，可简洁表示为 $F_c = \pi \Gamma_{ad} R_s$ 。该脱粘力对应于球体从液体基底上脱离时最大拉脱力的两倍，这是由于肥皂薄膜包含两个自由界面，在脱离过程中界面能释放的贡献为单界面体系的两倍，而液体基底仅涉及单侧自由表面^[189-190]。此外，在几何小变形线性化近似下，当球体在外力作用下从具有较大表面张力或较低弹性模量的弹性基底上脱离时，其脱粘力同样满足这一表达式^[191-192]。

图4.2(d)和图4.2(e)分别给出了在 $\theta_c = 90^\circ$ 和 $\theta_c = 180^\circ$ 的情况下，不同拉伸位移对应的肥皂薄膜变形构型。可以证明，体系的稳定性取决于加载方式。在力控制条件下，平衡路径由力-位移曲线的切线刚度 dF/dd 决定，当曲线达到最大拉力（状态 II）时，切线刚度为零；若继续沿解析解延拓，则有 $dF/dd < 0$ ，体系进入负刚度区间，从而失去稳定性。因此，在向上拉伸的外力作用下，体系在状态 II 处即发生突跳脱粘，随后直

接跃迁至完全分离状态；状态 III 和 IV 虽然可以由解析解计算得到，但在力控制实验中实际上是不可达的。然而，在位移控制条件下，外加位移被固定，体系的稳定性判据不同。只要力-位移曲线对位移的切线刚度仍为正，平衡解仍可保持稳定。因此，位移控制下体系可以越过最大拉力点（状态 II），并沿解析分支进入状态 III。只有当位移达到极大值（曲线出现垂直切线）时，体系才真正失稳并发生跳跃^[153]。

4.3 无矩薄膜

对于肥皂薄膜，界面黏附能 Γ_{ad} 由方程(4.8)定义，这使得任何给定的接触角对应着统一的脱粘力。相比之下，弹性薄膜的界面黏附能具有更具体的物理意义，代表了在刚性球体与薄膜接触界面扩展分离区域所需的能量。不同于肥皂薄膜，弹性薄膜的张力并非恒定值，而取决于特定材料规律和残余应力。此外，接触角 θ_c 并非预设值，而是作为满足 $G = \Gamma_{ad}$ 的解的一部分自然产生，这符合 Griffith 断裂理论。

在第三章中，我们已对无矩薄膜与刚性球体压痕模型中的弹性毛细效应进行了细致的分析；本节采用的模型形式与之类似，但专注于仅考虑薄膜弹性的情况，并进一步讨论几何非线性的影响；此外，本节基于体系所包含的物理量，给出详细的能量变分推导过程。

4.3.1 总势能变分与能量释放率

考虑无矩薄膜与刚性球体之间的无摩擦黏附接触，接触区域为共形接触。在有限变形假设下，薄膜接触区域的形状通常被近似为抛物线函数，以向上的脱粘方向为正方向，薄膜在接触区域的面外变形可描述为

$$z(r) = d + \frac{r^2}{2R_s} \quad (4.9)$$

然而，本小节中，我们希望更加深入地讨论变形几何非线性对脱粘力影响，因此同时考虑对接触区域形状的精确球体描述，如方程(4.1)所示。

接下来，通过严格的总势能变分对黏附体系进行分析，此时能量泛函仅包含弹性势能与外力功，使研究重点集中于薄膜的力学响应，并自然得到能量释放率，以分析接触线的稳定性与脱粘行为。在位移控制条件下，系统总势能可表示为

$$\Pi(u, u', z, z') = \int_0^{r_c} 2\pi r W(r, u, u') dr + \int_{r_c}^{R_f} 2\pi r [W(r, u, u', z') - pz] dr \quad (4.10)$$

其中， W 为无矩薄膜的拉伸弹性能密度，其对应的运动学关系、线弹性本构及能量具体形式分别由方程(2.4)，(2.5)和(2.3)给出。在接触区域 $(0, r_c)$ ，面外位移 z 由几何约束唯一确定，不作为独立变量参与变分，但其所引起的拉伸应变能仍保留在体系总势能中；在非接触区域 (r_c, R_f) ，显式考虑了附加压力 p 所做的功。

对总势能 Π 施加包含可移动边界 r_c 的变分，得到

$$\delta\Pi = 2\pi\delta \int_0^{r_c^-} L_1 dr + 2\pi\delta \int_{r_c^+}^{R_f} L_2 dr \quad (4.11)$$

上式中，上标 $-/+$ 表示接触线左侧或右侧的物理量。 L_1 和 L_2 分别是接触区域与非接触区域的加权势能密度，即

$$L_1 = rW(r, u, u'), \quad L_2 = rW(r, u, u', z') - prz \quad (4.12)$$

基于变分法则，对接触区域积分有

$$\delta \int_0^{r_c^-} L_1 dr = \int_0^{r_c^-} \left(\frac{\partial L_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L_1}{\partial u'} \delta u' \right) dr + L_1|_{r_c^-} \delta r_c^- \quad (4.13)$$

对含导数部分进行分部积分，可得

$$\int_0^{r_c^-} \frac{\partial L_1}{\partial u'} \delta u' dr = \frac{\partial L_1}{\partial u'} \Big|_{r_c^-} (\delta u)(r_c^-) - \frac{\partial L_1}{\partial u'} \Big|_0 (\delta u)(0) - \int_0^{r_c^-} \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_1}{\partial u'} \right) \delta u dr \quad (4.14)$$

需要特别指出，在可移动边界 $r = r_c$ 处，函数值的变分 $\delta f(r_c)$ 并不等同于变分函数在该点的取值 $(\delta f)(r_c)$ ，二者之间满足关系

$$(\delta f)(r_c) = \delta f(r_c) - f'(r_c) \delta r_c \quad (4.15)$$

自然边界条件表明，接触线处的位置及面内位移连续，即

$$\delta r_c^- = \delta r_c^+ = \delta r_c, \quad \delta u(r_c^-) = \delta u(r_c^+) = \delta u_c \quad (4.16)$$

于是可得

$$(\delta u)(r_c^-) = \delta u(r_c^-) - u'|_{r_c^-} \delta r_c^- = \delta u_c - u'|_{r_c^-} \delta r_c \quad (4.17)$$

薄膜对称中心 $r = 0$ 处，物理量的变分也满足(4.15)所示的变分关系，于是有

$$(\delta u)(0) = \delta u(0) - u'|_0 \delta 0 = 0 \quad (4.18)$$

类似地，对区间 (r_c^+, R_f) ，有

$$\delta \int_{r_c^+}^{R_f} L_2 dr = \int_{r_c^+}^{R_f} \left(\frac{\partial L_2}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L_2}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial L_2}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L_2}{\partial z'} \delta z' \right) dr + L_2|_{R_f} \delta R_f - L_2|_{r_c^+} \delta r_c^+ \quad (4.19)$$

其中含导数部分可进一步处理为

$$\begin{aligned} \int_{r_c^+}^{R_f} \frac{\partial L_2}{\partial u'} \delta u' dr &= \frac{\partial L_2}{\partial u'} \Big|_{R_f} (\delta u)(R_f) - \frac{\partial L_2}{\partial u'} \Big|_{r_c^+} (\delta u)(r_c^+) - \int_{r_c^+}^{R_f} \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial u'} \right) \delta u dr \\ \int_{r_c^+}^{R_f} \frac{\partial L_2}{\partial z'} \delta z' dr &= \frac{\partial L_2}{\partial z'} \Big|_{R_f} (\delta z)(R_f) - \frac{\partial L_2}{\partial z'} \Big|_{r_c^+} (\delta z)(r_c^+) - \int_{r_c^+}^{R_f} \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial z'} \right) \delta z dr \end{aligned} \quad (4.20)$$

结合(4.15)对上式中的变分进行计算，并考虑自然或物理边界条件，得到

$$(\delta u)(R_f) = \delta u(R_f) - u'|_{R_f} \delta R_f = \delta u_f - u'|_{R_f} \delta R_f = 0 \quad (4.21)$$

$$(\delta z)(R_f) = \delta z(R_f) - z'|_{R_f} \delta R_f = 0 \quad (4.22)$$

$$(\delta u)(r_c^+) = \delta u(r_c^+) - u'|_{r_c^+} \delta r_c^+ = \delta u_c - u'|_{r_c^+} \delta r_c \quad (4.23)$$

$$(\delta z)(r_c^+) = \delta z(r_c^+) - z'|_{r_c^+} \delta r_c^+ = \delta z_c - z'|_{r_c^+} \delta r_c \quad (4.24)$$

在方程(4.21)中, u_f 是固定边界处的预拉伸变形, 通过

$$u_f = (1 - \nu)R_f T / Y \quad (4.25)$$

给定, T 为固定端预张力。方程(4.22)应用了固定端处 $z(R_f) = 0$ 的条件。

由于接触区域薄膜的变形形状已知, 方程(4.24)中的 δz_c 可以被计算为

$$\delta z_c = z'|_{r_c^-} \delta r_c \quad (4.26)$$

将方程(4.12)-(4.26)代入方程(4.11), 得到总势能变分表达式

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Pi}{2\pi} = & \int_0^{r_c^-} \left[\frac{\partial L_1}{\partial u} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_1}{\partial u'} \right) \right] \delta u dr \\ & + \int_{r_c^+}^{R_f} \left\{ \left[\frac{\partial L_2}{\partial u} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial u'} \right) \right] \delta u + \left[\frac{\partial L_2}{\partial z} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial z'} \right) \right] \delta z \right\} dr \\ & + \left(\frac{\partial L_1}{\partial u'} \Big|_{r_c^-} - \frac{\partial L_2}{\partial u'} \Big|_{r_c^+} \right) \delta u_c \\ & + \left(L_1 \Big|_{r_c^-} - L_2 \Big|_{r_c^+} - \frac{\partial L_1}{\partial u'} u' \Big|_{r_c^-} + \frac{\partial L_2}{\partial u'} u' \Big|_{r_c^+} - \frac{\partial L_2}{\partial z'} z' \Big|_{r_c^-} + \frac{\partial L_2}{\partial z'} z' \Big|_{r_c^+} \right) \delta r_c \end{aligned} \quad (4.27)$$

上述推导完整呈现了薄膜总势能的变分计算过程, 在薄膜-球体接触模型中建立了统一的变分描述框架。该框架适用于中等变形情形, 同时在处理强非线性问题时也可沿用相同的变分思路, 从而避免直接代数推导的复杂性。

位移 δu 和 δz 的变分项可导出三组 Euler-Lagrange 方程, 其具体形式可进一步表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial u} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_1}{\partial u'} \right) = 0 & \implies N_\theta - \frac{d}{dr}(rN_r) = 0, & 0 \leq r < r_c \\ \frac{\partial L_2}{\partial u} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial u'} \right) = 0 & \implies N_\theta - \frac{d}{dr}(rN_r) = 0, & r_c < r \leq R_f \\ \frac{\partial L_2}{\partial z} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_2}{\partial z'} \right) = 0 & \implies N_r \frac{d^2 z}{dr^2} + N_\theta \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} + p = 0, & r_c < r \leq R_f \end{aligned} \quad (4.28)$$

上式中三组关系分别对应薄膜接触区域的面内平衡方程, 非接触区域的面内平衡方程, 及非接触区域的面外平衡方程。方程(4.27)中的其他项归为边界条件, 其中, 接触线处面内变形的变分 δu_c 对应于

$$\frac{\partial L_1}{\partial u'} \Big|_{r_c^-} - \frac{\partial L_2}{\partial u'} \Big|_{r_c^+} = 0 \implies N_r^- = N_r^+ \quad (4.29)$$

该条件结合接触线处径向位移的连续性条件说明, 接触线处的径向和环向薄膜张力均

连续。而接触线位置的变分 δr_c 所对应的边界条件可整理为

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial L_1}{\partial u'} u' \Big|_{r_c^-} + L_1 \Big|_{r_c^-} + \frac{\partial L_2}{\partial u'} u' \Big|_{r_c^+} - \frac{\partial L_2}{\partial z'} z' \Big|_{r_c^+} \Big|_{r_c^-} \\ & + \frac{\partial L_2}{\partial z'} z' \Big|_{r_c^+} - L_2 \Big|_{r_c^+} = \frac{N_r^+ r_c (1 - \cos \theta_c)}{\cos \theta^-} \end{aligned} \quad (4.30)$$

这意味着当平衡条件和连续性条件均满足，且 $\delta r_c \neq 0$ 时，总势能变分为

$$\delta \Pi = 2\pi N_r^+ (1 - \cos \theta_c) r_c \delta r_c / \cos \theta^- \quad (4.31)$$

能量释放率可通过评估形成剥离表面（或反之，形成接触表面）单位面积上总势能的变化来推导，具体地，

$$G = -\frac{\delta \Pi}{\delta A_{\text{fracture}}} = \frac{\delta \Pi}{\delta A_{\text{contact}}} = \frac{\delta \Pi}{2\pi r_c \delta r_c / \cos \theta^-} \quad (4.32)$$

将(4.31)代入(4.32)，得到无矩薄膜的能量释放率

$$G = N_r^+ (1 - \cos \theta_c) \quad (4.33)$$

式中接触区域外侧薄膜张力 N_r^+ 及薄膜-刚性球体接触角 θ_c 如图4.3所示。值得注意的是，该曲面结果与平面结果完全一致^[181]，且符合 Kendall 薄膜剥离角的概念^[96,191,193]。

根据图4.3所示的几何关系，有 $\theta_c = \theta^- + \theta^+$ ，对应于模型中接触区域的两种描述方式（精确球形(4.1)、抛物线近似(4.9)），接触线内侧变形角可分别计算为

$$\theta^- = \arctan \frac{r_c}{\sqrt{R_s^2 - r_c^2}} \quad (4.34)$$

和

$$\theta^- = \arctan (r_c / R_s) \quad (4.35)$$

而接触线外侧接触角通过 $\theta^+ = -\arctan z'(r_c^+)$ 计算。

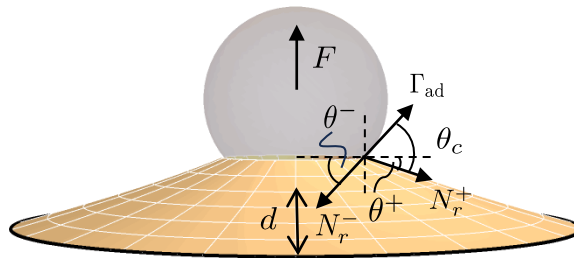


图 4.3 无矩薄膜与刚性球体在黏附接触下承受向上拉力的示意图

在以上分析中，能量释放率 G 描述了接触线外侧单位面积界面扩展所释放的弹性能量，但尚未给出界面脱粘的临界条件。由于界面脱粘过程在能量意义上等价于界面裂纹的扩展过程，因此可借助断裂力学中的 Griffith 准则进行判定。在忽略界面断裂中模式混合效应（即不区分张开型 Mode I 与剪切型 Mode II 分量对界面韧度影响）的假

设下^[194]，当能量释放率达到界面黏附能 Γ_{ad} 时，接触线处界面处于临界脱粘状态，即

$$G = \Gamma_{ad} \quad (4.36)$$

基于该临界条件，若 $G > \Gamma_{ad}$ ，界面将发生脱粘，而当 $G < \Gamma_{ad}$ ，界面保持稳定。该判据将总势能分析得到的能量释放率与界面黏附能联系起来，从而为接触线稳定性提供了相应的力学判定条件。

将能量释放率的具体表达式(4.33)代入方程(4.36)，结合几何关系 $\theta_c = \theta^- + \theta^+$ ，并在小转角假设下对余弦函数进行展开， $\cos \theta_c = 1 - \frac{1}{2}\theta_c^2 + O(\theta_c^4)$ ，方程(4.36)可改写为

$$z'^- - z'^+ = \sqrt{\frac{2\Gamma_{ad}}{N_r^+}} \quad (4.37)$$

该结果在形式上与第3.3.1节中的结果一致。在第3.3.1节中，首先基于接触线处的虚功原理建立张力平衡关系，并结合界面黏附能对其进行改写，从而得到变形一阶导数的跳跃条件，表明能量方法与力学平衡分析在该问题中给出了等价的接触线描述。

4.3.2 数值求解及脱粘力分析

为了得到无矩薄膜与刚性球体接触的脱粘力，需要对薄膜变形的位移场和应力场进行求解。纯弹性无矩薄膜的变形平衡方程由(4.28)给出，其中，对于悬浮薄膜，非接触区域的附加横向荷载 $p = 0$ 。为了方便求解，引入应力函数 Φ ，在此条件下，径向张力和环向张力的计算式由方程(2.16)给出，应力函数需要满足相容方程(2.18)。结合应力函数，纯弹性无矩薄膜的面外平衡方程可表示为

$$\frac{d}{dr} \left(\Phi \frac{dz}{dr} \right) = 0, \quad r_c \leq r \leq R_f \quad (4.38)$$

方程(4.38)以及薄膜全域上应力函数的相容方程构成求解的控制方程。在具体的求解过程中，采用薄膜拉伸模量 Y 和固定端半径 R_f 对各物理量进行无量纲化。由于本小节与第3.3.3节采用的接触构型一致，可直接沿用该小节给出的边界条件，如方程(3.32)所示，其中，接触线转角的跳跃条件需采用纯弹性薄膜的径向张力。

通过 MATLAB 的 `bvp5c` 工具箱进行求解，可以得到薄膜的变形及张力场。随后，拉脱力通过接触线外侧 $r = r_c^+$ 竖向力的平衡计算

$$F = 2\pi r_c N_r^+ \sin \theta^+ \quad (4.39)$$

该方程结合接触区域的形状函数(4.1)或(4.9)得到力-位移关系。

图4.4(a) 和 (b) 分别展示了不同黏附能对应的力-位移曲线，以及黏附能 $\Gamma_{ad}/Y = 10^{-2}$ 情况下，对应于零外力状态和临界脱粘状态的薄膜变形轮廓。尽管精确球形与抛物线近似的薄膜宏观拉伸行为和变形几何形态差异不大（如图4.4(b)），但接触角的微小差异会显著影响临界脱粘力。使用抛物线近似时，脱粘力始终为 $\pi\Gamma_{ad}R_s$ ，使用精确

球形描述时，脱粘力会大于该值。

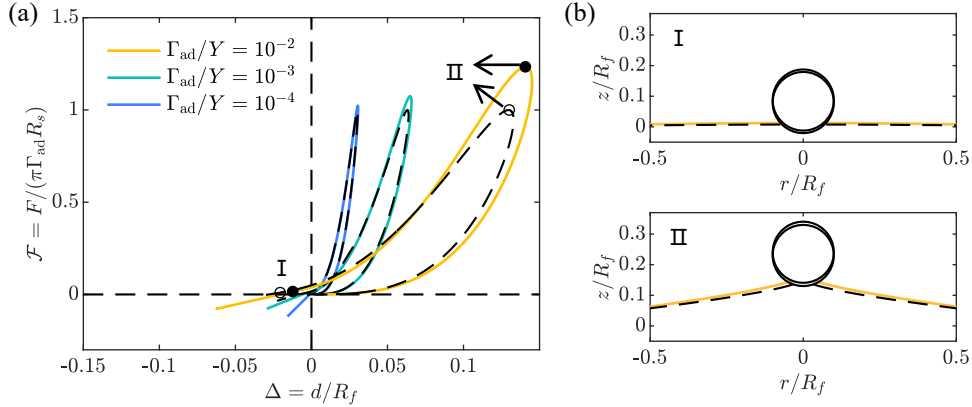


图 4.4 无矩薄膜的力-位移曲线及变形轮廓：(a) 使用精确球形形状（实线）和近似球形形状（即抛物面，虚线）计算的力-位移曲线。考虑三种不同的界面黏附值（见图例）、零预张力（即 $\bar{T} = T/Y = 0$ ），薄膜尺寸 $R_f/R_s = 10$ ；(b) 黏附能 $\Gamma_{ad}/Y = 10^{-2}$ 对应的变形轮廓：I 为零外力状态，II 为临界脱粘状态，实线和虚线分别对应精确球形与抛物线描述

当薄膜预张力 T 增大或黏附能减小时，球形描述下的临界脱粘力与 $\pi\Gamma_{ad}R_s$ 的偏差会逐渐减小，如图4.5所示。这种趋势符合预期，因为较大的预张力和较小的黏附能对应着更小的薄膜变形量及更小的接触半径，使得球形形状的抛物线近似变得更为合理。

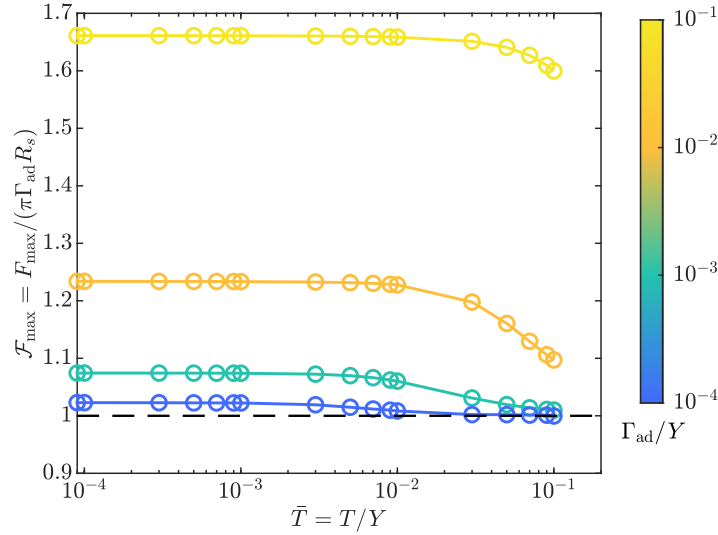


图 4.5 预张力和界面黏附对无矩薄膜剥离力的影响

上述结果表明，几何非线性对弹性薄膜与刚性球体之间的黏附接触行为具有重要影响，但尚不足以据此判断球面或抛物线描述的优劣。这主要是由于无矩薄膜理论基于 FvK 薄膜理论框架，其几何关系采用小斜率近似，使变形形状更接近抛物线形式^[195-196]，从而与精确球面几何描述之间存在差异。为进一步分析该问题，本章接下来在弹性薄膜与刚性球体接触的模型下中引入大变形框架，对超弹性薄膜的黏附接触行为进行研究，该框架能够在统一的几何描述下处理有限变形情形^[97]。

4.4 超弹性薄膜

本节讨论超弹性薄膜与刚性球体的黏附接触问题，考虑薄膜的大变形行为。为了准确描述薄膜的几何非线性，需明确区分变形前后的构型。图4.6展示了薄膜变形前后的横截面视图，薄膜变形分为三个过程，薄膜初始状态为未受力的平坦状态，厚度为 t_0 ，自然伸展半径为 R_f ；经等轴拉伸后，薄膜半径变为 $\lambda_0 R_f$ ，并在此边缘固定；接下来，刚性球体与薄膜发生接触并下压，接触过程为无摩擦、无黏附状态，下压至一定深度后，在外力作用下球体向上抬升，抬升过程为无摩擦、有黏附状态，直至二者分离。在上述过程中，薄膜的预拉伸以及球体接触时的面外变形均为轴对称。处于面外变形状态时，薄膜与刚性球体的接触半径记为 r_c ，对应参考构型中的 R_c 。

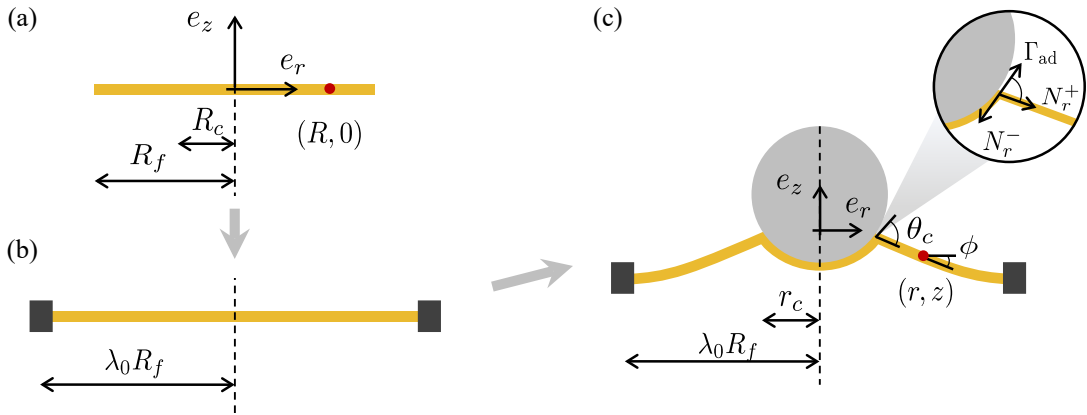


图 4.6 超弹性薄膜的黏附接触：(a) 未变形构型；(b) 预拉伸构型；(c) 脱粘构型

本节基于上述变形过程，对超弹性、大变形薄膜进行能量分析以得到其平衡条件，进而讨论超弹性薄膜与刚性球体之间的黏附接触及脱粘状态。在第4.4.1节中，给出完整的总势能分析过程及接触线处的能量平衡条件，在第4.4.2节中，给出数值求解方法及结果讨论。

4.4.1 总势能变分与能量释放率

首先给出薄膜变形的运动学描述。未变形构型中，物质点的坐标可定义为 $(R, 0)$ ，该点在变形构型中位移至 $(r(R), z(R))$ 。沿径向、环向和厚度方向的各项主伸长率分别为

$$\lambda_r = \sqrt{r'^2 + z'^2}, \quad \lambda_\theta = \frac{r}{R}, \quad \lambda_t = \frac{t}{t_0} \quad (4.40)$$

上式中， (\prime) 表示 $d(\cdot)/dR$ 。本小节考虑不可压缩材料，其变形满足 $\lambda_r \lambda_\theta \lambda_t = 1$ ，因此，变形后的薄膜厚度为 $t = t_0 / \lambda_r \lambda_\theta$ 。为便于描述薄膜大变形，引入 $\phi(R)$ 作为变形构型中薄膜轮廓 (r, z) 的顺时针旋转角度，其满足几何关系

$$\sin \phi = -\frac{z'}{\lambda_r}, \quad \cos \phi = \frac{r'}{\lambda_r}, \quad \tan \phi = -\frac{dz}{dr} \quad (4.41)$$

记 $W = W(\lambda_r, \lambda_\theta)$ 表示薄膜在未变形构型下的单位体积弹性应变能, N_r 和 N_θ 分别为径向和环向薄膜张力, 可由三维柯西应力 σ_r 和 σ_θ 沿当前厚度方向积分得到, 在薄膜假设下, 应力在厚度方向上近似均匀分布, 薄膜张力可计算为

$$N_r = t\sigma_r = \frac{t_0}{\lambda_\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_r}, \quad N_\theta = t\sigma_\theta = \frac{t_0}{\lambda_r} \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} \quad (4.42)$$

接下来, 对薄膜与刚性球体的总势能进行变分分析, 以获得对应的平衡条件及能量释放率。考虑对接触区域球体形状的精确几何非线性描述, 体系总势能可表示为

$$\Pi = 2\pi \int_0^{R_f} W(\lambda_r, \lambda_\theta) t_0 R dR - 2\pi \int_0^{R_c} p \left[z - \left(d + R_s - \sqrt{R_s^2 - r^2} \right) \right] r r' dR \quad (4.43)$$

上式中, p 作为 Lagrange 乘子, 用于确保薄膜在接触区域与球体保持共形接触, 且接触区域在未变形状态下的形状并非预先已知。对上述总势能施加可动边界 ($\delta R_c \neq 0$) 变分, 得到

$$\delta \Pi = 2\pi \delta \int_0^{R_c^-} L_1 dr + 2\pi \delta \int_{R_c^+}^{R_f} L_2 dr \quad (4.44)$$

其中

$$L_1 = t_0 R W(r, r', z') - p \left[z - \left(d + R_s - \sqrt{R_s^2 - r^2} \right) \right] r r' \quad (4.45)$$

和

$$L_2 = t_0 R W(r, r', z') \quad (4.46)$$

分别为接触区域和非接触区域的加权能量密度函数。在接触区域, 变分可具体地展开为

$$\delta \int_0^{R_c^-} L_1 dr = \int_0^{R_c^-} \left(\frac{\partial L_1}{\partial r} \delta r + \frac{\partial L_1}{\partial r'} \delta r' + \frac{\partial L_1}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L_1}{\partial z'} \delta z' \right) dR + L_1 \Big|_{R_c^-} \quad (4.47)$$

其中

$$\begin{aligned} \int_0^{R_c^-} \frac{\partial L_1}{\partial r'} \delta r' dr &= \frac{\partial L_1}{\partial r'} \Big|_{R_c^-} (\delta r)(R_c^-) - \frac{\partial L_1}{\partial r'} \Big|_0 (\delta r)(0) - \int_0^{R_c^-} \frac{d}{dR} \left(\frac{\partial L_1}{\partial r'} \right) \delta r dR \\ \int_0^{R_c^-} \frac{\partial L_1}{\partial z'} \delta z' dr &= \frac{\partial L_1}{\partial z'} \Big|_{R_c^-} (\delta z)(R_c^-) - \frac{\partial L_1}{\partial z'} \Big|_0 (\delta z)(0) - \int_0^{R_c^-} \frac{d}{dR} \left(\frac{\partial L_1}{\partial z'} \right) \delta z dR \end{aligned} \quad (4.48)$$

类似地, 在非接触区域, 变分可具体地展开为

$$\delta \int_{R_c^+}^{R_f} L_2 dr = \int_{R_c^+}^{R_f} \left(\frac{\partial L_2}{\partial r} \delta r + \frac{\partial L_2}{\partial r'} \delta r' + \frac{\partial L_2}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L_2}{\partial z'} \delta z' \right) dR + L_2 \Big|_{R_f} - L_2 \Big|_{R_c^+} \quad (4.49)$$

其中

$$\begin{aligned} \int_{R_c^+}^{R_f} \frac{\partial L_2}{\partial r'} \delta r' dr &= \frac{\partial L_2}{\partial r'} \Big|_{R_f} (\delta r)(R_f) - \frac{\partial L_2}{\partial r'} \Big|_{R_c^+} (\delta r)(R_c^+) - \int_{R_c^+}^{R_f} \frac{d}{dR} \left(\frac{\partial L_2}{\partial r'} \right) \delta r dR \\ \int_{R_c^+}^{R_f} \frac{\partial L_2}{\partial z'} \delta z' dr &= \frac{\partial L_2}{\partial z'} \Big|_{R_f} (\delta z)(R_f) - \frac{\partial L_2}{\partial z'} \Big|_{R_c^+} (\delta z)(R_c^+) - \int_{R_c^+}^{R_f} \frac{d}{dR} \left(\frac{\partial L_2}{\partial z'} \right) \delta z dR \end{aligned} \quad (4.50)$$

将方程(4.47)-(4.50)代入(4.44)，得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\Pi}{2\pi} = & \int_0^{R_c^-} \left[\left(\frac{\partial L_1}{\partial r} - \frac{d}{dR} \frac{\partial L_1}{\partial r'} \right) \delta r + \left(\frac{\partial L_1}{\partial z} - \frac{d}{dR} \frac{\partial L_1}{\partial z'} \right) \delta z \right] dR \\
 & + \int_{R_c^+}^{R_f} \left[\left(\frac{\partial L_2}{\partial r} - \frac{d}{dR} \frac{\partial L_2}{\partial r'} \right) \delta r + \left(\frac{\partial L_2}{\partial z} - \frac{d}{dR} \frac{\partial L_2}{\partial z'} \right) \delta z \right] dR \\
 & - \frac{\partial L_1}{\partial r'} \Big|_0 (\delta r)(0) - \frac{\partial L_1}{\partial z'} \Big|_0 (\delta z)(0) \\
 & + L_1 \Big|_{R_c^-} \delta R_c^- + \frac{\partial L_1}{\partial r'} \Big|_{R_c^-} (\delta r)(R_c^-) + \frac{\partial L_1}{\partial z'} \Big|_{R_c^-} (\delta z)(R_c^-) \\
 & - L_2 \Big|_{R_c^+} \delta R_c^+ - \frac{\partial L_2}{\partial r'} \Big|_{R_c^+} (\delta r)(R_c^+) - \frac{\partial L_2}{\partial z'} \Big|_{R_c^+} (\delta z)(R_c^+) \\
 & + L_2 \Big|_{R_f} \delta R_f + \frac{\partial L_2}{\partial r'} \Big|_{R_f} (\delta r)(R_f) + \frac{\partial L_2}{\partial z'} \Big|_{R_f} (\delta z)(R_f)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

对于整个薄膜域 $0 \leq R \leq R_f$ 上的任意位置，由于变分 δr 与 δz 具有任意性，根据方程 (4.51) 所示的总势能变分表达，可得到四个 Euler-Lagrange 方程，并可将其组合为

$$p\mathcal{H}(R_c - R) = -\frac{t_0}{rz'} \left[\frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} - \frac{r'}{\lambda_r} \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} - R \left(\frac{r'}{\lambda_r} \right)' \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} - R \frac{r'}{\lambda_r} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_r} \right)' \right] \tag{4.52}$$

以及

$$p\mathcal{H}(R_c - R) = -\frac{t_0}{rr'} \left[\frac{z'}{\lambda_r} \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} - R \left(\frac{z'}{\lambda_r} \right)' \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} - R \frac{z'}{\lambda_r} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_r} \right)' \right] \tag{4.53}$$

其中， \mathcal{H} 为 Heaviside 阶跃函数。上式中，能量密度 W 关于变量 r , r' , z , z' 的偏导数可通过链式法则计算得到，即

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta}, \quad \frac{\partial W}{\partial r'} = \frac{r'}{\lambda_r} \frac{\partial W}{\partial \lambda_r}, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z'} = \frac{z'}{\lambda_r} \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} \tag{4.54}$$

通过对方程(4.52)和(4.53)取平均，并结合(4.42)，可得到薄膜变形的面外平衡方程

$$\kappa_r N_r + \kappa_\theta N_\theta + p\mathcal{H}(R_c - R) = 0 \tag{4.55}$$

其中， κ_r 和 κ_θ 分别为主拉伸 λ_r 和 λ_θ 对应的主曲率，根据薄膜变形的运动学描述，可分别计算为

$$\kappa_r = \frac{r'z'' - z'r''}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}, \quad \kappa_\theta = \frac{z'}{r(r'^2 + z'^2)^{1/2}} \tag{4.56}$$

通过对方程(4.52)和(4.53)取差，并结合(4.42)，可得到薄膜变形的面内平衡方程

$$\frac{dN_r}{dR} + \frac{r'(N_r - N_\theta)}{r} = 0 \tag{4.57}$$

需要指出的是，在本小节的推导过程中，并未预先假定接触区域满足共形接触条件，该接触特征是通过引入 Lagrange 乘子 p 并对体系总势能进行变分 $\partial\Pi/\partial p = 0$ 自然得到的。而在变形变分所得到的平衡方程中， p 在物理上对应于作用在薄膜表面的法向压

强，其空间分布也是平衡条件的一部分，并通过阶跃函数进入面外平衡方程(4.55)。对于悬浮薄膜，压强仅在接触区域内非零，其来源为刚性球体施加的接触压力。

在小斜率近似（即 FvK 理论的变形描述）下，薄膜变形满足 $r' \rightarrow 1$ 以及 $z'^2 \rightarrow 0$ ，将上述关系代入方程(4.55) 和 (4.57)，则大变形平衡方程会退化为无矩薄膜的平衡方程。此外，方程(4.55)描述了薄膜变形的高度非线性，其在概念上与肥皂薄膜的平衡方程(4.2)一致，但薄膜张力和曲率表达式因材料性质而更为复杂。

通过总势能变分(4.51)的其他部分可推得体系的能量释放率。根据变分法则，有

$$\begin{aligned}
 (\delta r)(0) &= \delta r(0) - r'|_0 \delta 0 = 0 \\
 (\delta z)(0) &= \delta z(0) - z'|_0 \delta 0 = \delta z_0 \\
 (\delta r)(R_c^\pm) &= \delta r(R_c^\pm) - r'|_{R_c^\pm} \delta R_c^\pm = \delta r_c - r'|_{R_c^\pm} \delta R_c \\
 (\delta z)(R_c^\pm) &= \delta z(R_c^\pm) - z'|_{R_c^\pm} \delta R_c^\pm = \delta z_c - z'|_{R_c^\pm} \delta R_c \\
 (\delta r)(R_f) &= \delta r(R_f) - r'|_{R_f} \delta R_f = \delta r_f \\
 (\delta z)(R_f) &= \delta z(R_f) - z'|_{R_f} \delta R_f = 0
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

基于自然边界条件或已知的边界约束，上式中的部分关系式已可确定为零。此外，由轴对称性可知，总势能变分式(4.51)中与 δz_0 相关的系数为零，根据给定的预拉伸边界条件，有 $\delta r_f = 0$ 。因此，总势能变分中的剩余项对应接触线处的能量条件。进一步地，基于接触线处面外变形 z 的连续性，可得到接触线高度 z_c 的变分表达式为

$$\delta z_c = \left(\frac{\partial z}{\partial r} \delta r \right)_{R_c^-} = \frac{dz}{dr} \Big|_{R_c^-} \delta r_c \tag{4.59}$$

将方程(4.58)-(4.59)代入方程(4.51)，得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \Pi}{2\pi} &= [(-\lambda_r^- N_r^- + \lambda_r^+ N_r^+) r_c + t_0 R_c (W^- - W^+)] \delta R_c \\
 &+ \left(\frac{r r'}{\lambda_r} \Big|_{R_c^-} N_r^- + \frac{z'}{\lambda_r} \Big|_{R_c^-} r_c N_r^- \frac{dz}{dr} \Big|_{R_c^-} - \frac{r r'}{\lambda_r} \Big|_{R_c^+} N_r^+ - \frac{z'}{\lambda_r} \Big|_{R_c^+} r_c N_r^+ \frac{dz}{dr} \Big|_{R_c^+} \right) \delta r_c
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

结合几何关系(4.41)，环向伸长比 $\lambda_\theta = r_c/R_c$ 以及临界脱粘状态下的变分关系 $\delta r_c = r'^- \delta R_c$ ，上式可改写为

$$\frac{\delta \Pi}{2\pi} = \left[\left(\frac{\lambda_r^+}{\lambda_r^-} N_r^+ - \cos \theta_c N_r^+ \right) + \frac{t_0}{\lambda_\theta \lambda_r^-} (W^- - W^+) \right] \frac{r_c}{\cos \phi^-} \delta r_c \tag{4.61}$$

上式中， $N_r^+ = N_r(R_c^+)$ 为接触线右侧薄膜张力， $\theta_c = \phi(R_c^+) - \phi(R_c^-)$ 为薄膜与刚性球体之间的接触角，如图4.6(c)所示。

将方程(4.61)代入能量释放率的概念式(4.32)，得到大变形薄膜与刚性球体接触的能量释放率

$$G = \frac{\delta \Pi}{2\pi r_c \delta r_c / \cos \phi(R_c^-)} = N_r^+ (1 - \cos \theta_c) + \frac{t_0}{\lambda_r^- \lambda_\theta} \left[\frac{\partial W}{\partial \lambda_r} \Big|_{r=r_c^+} \Delta \lambda_r - \Delta W \right] \tag{4.62}$$

方程(4.62)中, $\Delta\lambda_r = \lambda_r^+ - \lambda_r^-$ 表示接触线两侧的径向伸长比差值, $\Delta W = W(\lambda_r^+, \lambda_\theta) - W(\lambda_r^-, \lambda_\theta)$ 表示对应的弹性应变能差值。该结果与 Long 等人^[97] 和 Rao 等人^[181] 关于薄膜与平面刚体接触问题的研究结论一致。此外, 当设定 $\lambda_r^- = 1$ 时, 该方程可退化为 Eremeyev 等人^[197] 给出的超弹性薄膜剥离公式, 进一步可转化为 Rivlin 的公式^[198] 及经典的 Kendall 方程^[96]。

4.4.2 数值求解

方程(4.55)与(4.57)描述了薄膜在大变形条件下的平衡状态。结合接触模型的边界条件, 该方程组可用于求解薄膜变形。为便于求解, 在大变形分析中通常将求解变量改写为 λ_θ , z , ϕ 及 λ_r , 并将控制方程重构为这四个变量的一阶常微分方程组, 从而实现数值求解。

将几何关系(4.41)代入(4.56), 得到

$$\kappa_r = -\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{\phi}{\lambda_r}, \quad \kappa_\theta = -\frac{\sin\phi}{r} \quad (4.63)$$

将上式代入平衡方程(4.55)和(4.57), 并结合几何关系(4.41)中已包含的 z' 与 r' 导数表达式, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\theta}{dR} &= \frac{\lambda_r \cos\phi - \lambda_\theta}{R} \\ \frac{dz}{dR} &= -\lambda_r \sin\phi \\ \frac{d\phi}{dR} &= \frac{p \mathcal{H}(R_c - R) R \lambda_\theta \lambda_r - \lambda_r N_\theta \sin\phi}{R \lambda_\theta N_r} \\ \frac{d\lambda_r}{dR} &= \frac{\lambda_r (N_\theta - N_r) \cos\phi - \lambda_\theta (\partial N_r / \partial \lambda_\theta) (\lambda_r \cos\phi - \lambda_\theta)}{R \lambda_\theta (\partial N_r / \partial \lambda_r)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

上述方程构成了描述薄膜大变形行为的一阶控制方程组, 已被广泛应用于剥离^[97]、润湿^[61,181] 等相关问题的研究中。

在接触区域内薄膜形状已由式(4.1)给定的前提下, 该区域的待解参数仅有 λ_θ 和 λ_r , 此时该问题可通过引入七个附加的边界及匹配条件得到完整求解。其中, 六个条件对应于两区域常微分方程组的边界与连续性要求, 另一个条件用于确定未知接触半径 R_c 。因此, 施加如下自然边界条件:

$$\lambda_r(0) = \lambda_\theta(0), \quad z(R_f) = 0, \quad \lambda_\theta(R_f) = \lambda_0 \quad (4.65)$$

上式中, λ_0 表示预拉伸。此外, 接触线处的连续性还需满足

$$z(r_c^-) = z(r_c^+), \quad \lambda_r(R_c^-) = \lambda_r(R_c^+), \quad \lambda_\theta(R_c^-) = \lambda_\theta(R_c^+) \quad (4.66)$$

其中, λ_r 在接触线处的连续性源于无摩擦界面的物理约束。部分研究忽略刚体表面的牵引作用, 从而将该假设替换为非连续薄膜张力的平衡条件^[97,102]。然而, 该连续性假设

与前文针对无矩薄膜建立的变分框架相一致，同时也符合已有关于润滑界面薄膜问题的研究结论。例如，在薄膜润湿^[61,105,181]以及原子级光滑二维材料鼓泡^[68,128,199]等问题中，应变分量的连续性已在拉曼光谱实验^[200-201]和分子动力学模拟^[202-203]中得到观测与验证。

最后，将方程(4.66)代入(4.62)，并考虑无摩擦的JKR型能量判据(4.36)，得到

$$N_r^+(1 - \cos \theta_c) = \Gamma_{ad} \quad (4.67)$$

其中， θ_c 表示局部接触角。该结果与肥皂膜情形下的式(4.8)类似，并与无矩薄膜的式(4.33)完全一致，但其适用范围推广至任意满足热力学允许条件的材料本构模型。直观而言，如图4.6(c)中接触线处的局部放大图， θ_c 可以被理解为杨氏接触角在弹性体系中的对应形式，即一种弹性化的杨氏角。

在上述分析中，我们尚未涉及材料本构关系及薄膜张力 N_r 、 N_θ 的具体表达形式，因此所得结论对任意超弹性薄膜均具有普适性。为便于对薄膜与刚性球体黏附接触的平衡状态进行定量分析，本小节进一步引入Gent模型^[204]对薄膜材料的力学行为进行描述，其能量函数的定义如下：

$$W = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \quad (4.68)$$

上式中， μ 为薄膜剪切模量， J_m 为与薄膜极限伸长相关的材料常数， $I_1 = \lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + 1/(\lambda_r^2 \lambda_\theta^2)$ 是左Cauchy-Green变形张量的第一主不变量。将方程(4.68)代入(4.42)得到对应于Gent本构的薄膜张力

$$\begin{cases} N_r = \frac{-\mu t_0 J_m (\lambda_r^4 \lambda_\theta^2 - 1)}{\lambda_r \lambda_\theta + \lambda_r^3 \lambda_\theta^3 (\lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 - 3 - J_m)} \\ N_\theta = \frac{-\mu t_0 J_m (\lambda_r^2 \lambda_\theta^4 - 1)}{\lambda_r \lambda_\theta + \lambda_r^3 \lambda_\theta^3 (\lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 - 3 - J_m)} \end{cases} \quad (4.69)$$

由(4.68)可知，变形必须满足 $I_1 - 3 < J_m$ ，当 $I_1 - 3$ 逐渐接近 J_m 时，应变能密度函数趋于发散，此时超弹性材料中的分子链逐渐被拉直并接近其有限伸长极限，从而表现出显著的应变增硬效应。因此，较小的 J_m 意味着材料在较小变形下即进入强非线性响应区间，其可变形能力受到更强约束；而当 J_m 较大时，材料在更大变形范围内表现出近似线性响应，其本构行为逐渐趋近于neo-Hookean模型。该模型的弹性应变能密度函数可表示为^[205]

$$W = \frac{\mu}{2} \left(\lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\theta^2} - 3 \right) \quad (4.70)$$

对应的薄膜张力可表示为

$$N_r = \frac{\mu t_0 (\lambda_r^4 \lambda_\theta^2 - 1)}{\lambda_r^3 \lambda_\theta^3}, \quad N_\theta = \frac{\mu t_0 (\lambda_r^2 \lambda_\theta^4 - 1)}{\lambda_r^3 \lambda_\theta^3} \quad (4.71)$$

根据具体的能量形式，采用打靶法对一阶常微分方程组(4.64)进行求解。具体地，定

义无量纲变量

$$\{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{\lambda_\theta, z/R_f, \phi, \lambda_r\} \quad (4.72)$$

在接触区域，基于共形接触条件，变形后的高度与转角关系满足

$$y_2 = \Delta + \bar{R}_s - \sqrt{\bar{R}_s^2 - (y_1 \bar{R})^2}, \quad y_3 = -\arctan \bar{R} / \sqrt{\bar{R}_s^2 - (y_1 \bar{R})^2} \quad (4.73)$$

上式中， $\bar{R}_s = R_s/R_f$ 表示无量纲化的球体半径， $\bar{R} = R/R_f$ 为无量纲化的薄膜半径。在非接触区域，各参量均需要进行完整求解。对应于 Gent 本构关系，有

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{R}} y_1 &= \frac{y_4 \cos y_3 - y_1}{\bar{R}} \\ \frac{d}{d\bar{R}} y_2 &= -y_4 \sin y_3 \\ \frac{d}{d\bar{R}} y_3 &= -\frac{y_4 \sin y_3 (y_4^2 y_1^4 - 1) / \bar{R}}{y_1 (y_4^4 y_1^2 - 1)} \\ \frac{d}{d\bar{R}} y_4 &= \frac{\Lambda y_4^2 (y_4^2 y_1^4 - 3) \cos y_3 - \Lambda y_4 y_1 (y_4^4 y_1^2 - 3)}{\bar{R} y_1 \left[(y_4^4 y_1^2 + 3) \Lambda + 2 (y_4^4 y_1^2 - 1)^2 / (J_m y_4^2 y_1^2) \right]} \\ &\quad + \frac{2 y_4 (y_4^6 y_1^6 - y_4^2 y_1^2 I_1 + 2) (-y_4 \cos y_3 + y_1)}{\bar{R} y_1 \left[y_4^2 y_1^2 (y_4^4 y_1^2 + 3) J_m \Lambda + 2 (y_4^4 y_1^2 - 1)^2 \right]} \end{aligned} \quad (4.74)$$

上式中， $\Lambda = 1 - (I_1 - 3)/J_m$ ，对应于悬浮薄膜，考虑了零附加横向压力。当材料常数 $J_m \rightarrow \infty$ ，方程(4.74)退化为 neo-Hookean 模型的求解方程组

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{R}} y_1 &= \frac{y_4 \cos y_3 - y_1}{\bar{R}} \\ \frac{d}{d\bar{R}} y_2 &= -y_4 \sin y_3 \\ \frac{d}{d\bar{R}} y_3 &= -\frac{y_4 (y_4^2 y_1^4 - 1) \sin y_3 / \bar{R}}{y_1 (y_4^4 y_1^2 - 1)} \\ \frac{d}{d\bar{R}} y_4 &= \frac{y_4^2 (y_4^2 y_1^4 - 3) \cos y_3 - y_4 y_1 (y_4^4 y_1^2 - 3)}{\bar{R} y_1 (y_4^4 y_1^2 + 3)} \end{aligned} \quad (4.75)$$

接触区域的解可通过在初始点 $\bar{R} = \bar{R}_0 (\bar{R}_0 \rightarrow 0)$ 处猜测一主曲率 k 得到：

$$y_1(\bar{R}_0) = k, \quad y_2(\bar{R}_0) = \Delta, \quad y_3(\bar{R}_0) = 0, \quad y_4(\bar{R}_0) = k \quad (4.76)$$

非接触区域的解可通过在 $\bar{R} = \bar{R}_c$ 处施加连续性条件或平衡条件(4.66)-(4.67)得到。通过调节未知参数 k 与接触线位置 \bar{R}_c 使其满足 $\bar{R} = 1$ 处的边界条件(4.65)。在数值实现中，为方便得到全过程的力-位移曲线，亦可给定不同的 \bar{R}_c ，通过牛顿法对 k 和 Δ 进行迭代。

4.4.3 脱粘力分析

通过上述步骤，可对悬浮超弹性薄膜与刚性球体接触所引起的大变形问题进行求解，该过程中薄膜的几何非线性与材料非线性均得到充分考虑。得到薄膜的变形及张

力场后，对应的拉脱力可通过接触线处的竖直方向力的平衡得到：

$$F = 2\pi r_c N_r^+ \sin\phi(R_c^+) \quad (4.77)$$

首先考虑材料非线性对平衡状态的影响。图4.7(a) 和 (b) 分别展示了不同材料本构 (J_m 值) 对应的脱粘过程力-位移曲线与力-接触半径曲线。计算条件为 $\Gamma_{ad} = \mu t_0/2$, $R_f = 1.1R_s$, 零预拉伸 $\lambda_0 = 1$ 。图4.7(b) 中，相同载荷条件下， J_m 较小的薄膜与刚性球体接触时所形成的接触面积更小，这反映了 Gent 模型的应变增强效应。

然而，图4.7(a) 表明，当拉力达到最大值时，对应的临界拉伸位移并未随 J_m 呈现简单的单调变化关系。该现象源于材料非线性与几何效应之间的耦合作用，临界拉伸位移并非直接由材料参数决定，而是通过接触半径间接控制，如图4.7(c) 所示。相比之下，图4.7(d) 显示，当改变界面黏附能时，系统表现出更为直接的响应：随着黏附能的增大，接触半径与临界拉伸位移均同步增大。这是由于黏附能直接控制接触区域的稳定性，从而在几何上同时推动接触扩展与分离位移的增加。尽管存在几何与材料耦合的影响，对于不同应变增强行为的薄膜，其最大拉脱力均可统一表示为 $F_C = \pi\Gamma_{ad}R_s$ ，这一结果表明，与经典块体 JKR 黏附理论类似，非线性薄膜的脱粘力主要由黏附能和球体尺寸决定，应变增强效应对其无明显调控作用。

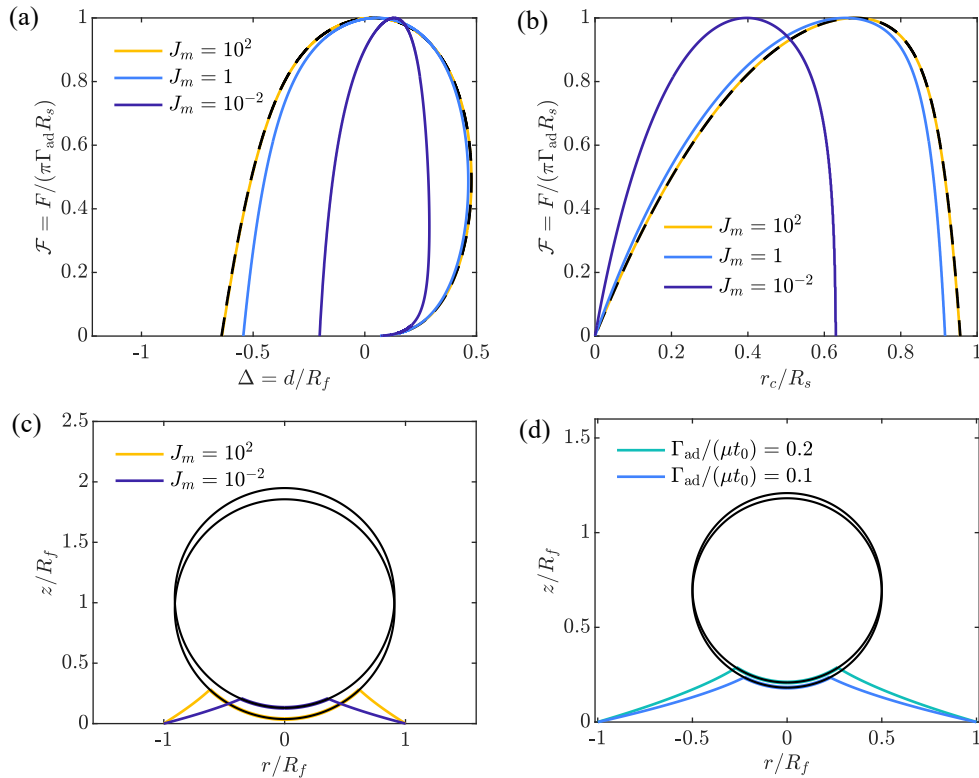


图 4.7 Gent 型超弹性薄膜的拉脱行为：(a) 不同应变增强程度薄膜（由图例中的 J_m 表示）对应的力-位移曲线，虚线表示 neo-Hookean 薄膜 ($J_m \rightarrow \infty$)；(b) 不同材料参数下的力-接触半径关系；(c) 两种不同材料参数下薄膜在脱粘点的变形轮廓；(d) 两种不同黏附能下薄膜在脱粘点的变形轮廓，此时薄膜尺寸为 $R_f = 2R_s$, 预拉伸 $\lambda_0 = 1$, 材料参数 $J_m = 500$

图4.8展示了薄膜尺寸、界面黏附能以及预拉伸等参数对力-位移以及力-接触半径关系的影响。这里比较了两类系统的计算结果：实线为具有精确球体几何的 Gent 型超弹性薄膜 ($J_m = 500$)，虚线为采用抛物线近似形状的无矩薄膜，其计算理论如第4.3节所述。对于无矩薄膜，其杨氏模量取为 $E = 3\mu$ ，对应不可压缩情况下的泊松比 $\nu = 0.5$ 。

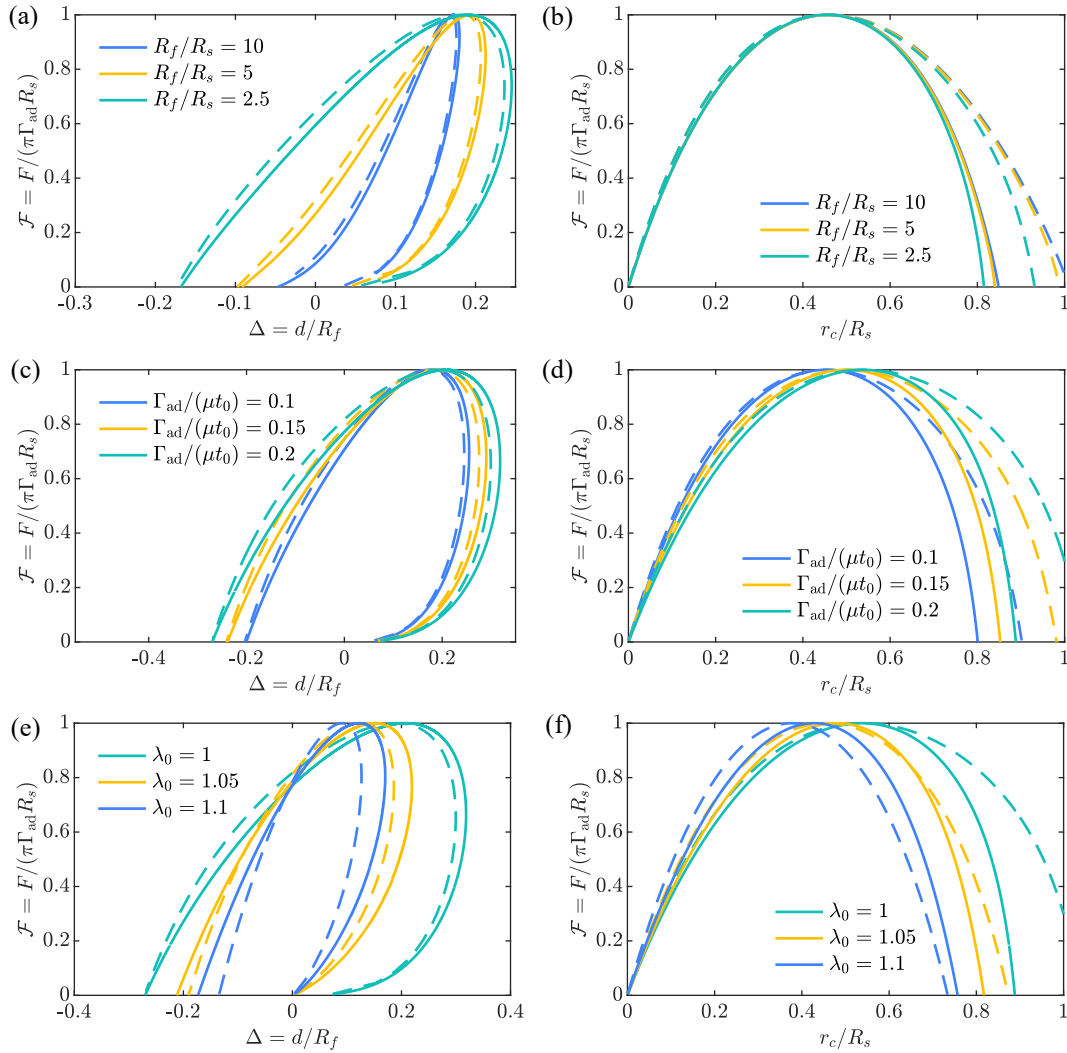


图 4.8 薄膜尺寸、黏附能和预拉伸对薄膜脱粘行为的影响:(a, b) 不同无量纲薄膜尺寸下的力-位移曲线与力-接触半径曲线, 此时黏附能取 $\Gamma_{ad}/(\mu t_0) = 0.1$, 预拉伸为零; (c, d) 不同无量纲黏附能下的力-位移曲线与力-接触半径曲线, 薄膜尺寸为 $R_f/R_s = 2$, 预拉伸为零; (e, f) 不同预拉伸值下的力-位移曲线与力-接触半径曲线, 此时 $\Gamma_{ad}/(\mu t_0) = 0.2$, $R_f/R_s = 2$ 。相同颜色的实线和虚线使用相同参数计算, 包括薄膜尺寸、黏附能及预拉伸

图4.8(a) 和 (b) 讨论了薄膜相对尺度 R_f/R_s 对脱粘行为的影响。根据计算结果, 随着薄膜尺寸的增大, 脱粘拉伸位移 d 显著增加, 反映了几何尺度增大对面外变形顺应性的增强作用。然而, 在图4.8(a) 中, 由于统一采用 R_f 进行无量纲化处理, 该趋势被弱化。值得注意的是, 在 $r_c \ll R_f$ 的条件下, 脱粘接触面积对体系整体尺度并不敏感^[186,206], 如图4.8(b) 所示。这表明接触行为主要由接触区附近的局部力学平衡所决定, 而远场仅

提供背景应力，从而使接触区与整体结构在一定程度上解耦，这与经典块体 JKR 接触具有相似性。

在球体通过界面黏附向上拉伸薄膜的过程中，相较于线性理论，非线性理论得到的薄膜变形在相同外力作用下表现出更明显的向上拉伸响应（即力-位移曲线整体向右偏移）。这一差异源于几何非线性强化了位移与面内拉伸之间的耦合，使结构在外载作用下更倾向于通过整体拉伸来实现响应；不过，由于脱粘过程中整体变形幅度较小，该效应的影响相对有限，如图4.8(a)所示。相比之下，稳定零外力状态（ $F = 0, r_c \neq 0$ ，对应图4.2(d)和(e)中的状态 I）下的接触半径更为敏感地反映了上述差异，其中线性理论普遍预测更大的零外力接触半径，如图4.8(b)所示。

图4.8(c)-(f)表明，无量纲黏附能与预拉伸对黏附力学响应具有显著影响，且其变化趋势与物理直觉一致：随着黏附能的增大，临界拉伸位移及临界脱粘半径均随之增大；而随着预拉伸水平的提高，薄膜整体力学响应趋于刚化，上述两个特征量相应减小。特别地，预拉伸的引入使薄膜变形由几何非线性主导转变为线性预应力与非线性拉伸相互竞争的双重作用机制，从而使线性与非线性理论的力学响应不再呈现出单调差异。在上述各类参数变化条件下，最大拉力（即脱粘力）保持不变，均为 $F_c = \pi\Gamma_{\text{ad}}R_s$ 。

4.5 表面张力作用下的超弹性薄膜脱粘

不同于第4.3节和第4.4节中基于总势能变分的推导，本小节采用总自由能最小化方法对超弹性薄膜与刚性球体的黏附接触体系进行分析，将薄膜的弹性势能与界面黏附能等所有能量贡献纳入系统总能量，并通过 Lagrange 乘子显式引入接触约束。该方法能够在统一的能量框架下描述薄膜的变形与接触条件，使得接触线处的脱粘条件可以自然从系统平衡中获得，同时清晰体现各部分能量对整体平衡的影响。

考虑常数表面能密度^[120,162]，体系的总自由能可表示为

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{tot}} = & \Pi + 4\pi R_s^2 \gamma_{sv} + \int_0^{r_c} 2\pi r (\gamma_{mv} + \gamma_{ms} - \gamma_{sv}) \sqrt{r'^2 + z'^2} dR \\ & + \int_{r_c}^{R_f} 2\pi r 2\gamma_{mv} \sqrt{r'^2 + z'^2} dR \end{aligned} \quad (4.78)$$

其中， γ_{mv} 、 γ_{ms} 以及 γ_{sv} 分别是薄膜-空气界面、薄膜-球体界面及球体-空气界面的表面能密度，为便于表述，定义表面张力函数

$$T_s(R) = (\gamma_{mv} + \gamma_{ms} - \gamma_{sv}) \mathcal{H}(R_c - R) + 2\gamma_{mv} \mathcal{H}(R - R_c) \quad (4.79)$$

对应于体系的平衡状态，总自由能需要在动边界条件 $\delta R_c \neq 0$ 的条件下满足能量极值条件 $\delta \Pi = 0$ ，其中，总自由能变分可计算为

$$\delta \Pi = 2\pi \delta \int_0^{R_c^-} L_1 dr + 2\pi \delta \int_{R_c^+}^{R_f} L_2 dr \quad (4.80)$$

其中 L_1 与 L_2 为考虑各界面表面能的加权能量密度，分别由方程(4.45)和(4.46)叠加(4.78)中所包含的表面能积分函数得到。

由于变分参量保持为 r, r', z, z' ，第4.4.1节中的变分框架(4.47)-(4.51)仍然成立，对应的 Euler-Lagrange 方程可改写为

$$p\mathcal{H}(R_c - R) = -\frac{t_0}{rz'} \left[\frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} - \frac{r'}{\lambda_r} \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} - R \left(\frac{r'}{\lambda_r} \right)' \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} - R \frac{r'}{\lambda_r} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_r} \right)' \right] - T_s(\kappa_r + \kappa_\theta) \quad (4.81)$$

以及

$$p\mathcal{H}(R_c - R) = -\frac{t_0}{rr'} \left[\frac{z'}{\lambda_r} \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} - R \left(\frac{z'}{\lambda_r} \right)' \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} - R \frac{z'}{\lambda_r} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_r} \right)' \right] - T_s(\kappa_r + \kappa_\theta) \quad (4.82)$$

其中曲率 κ_r 和 κ_θ 仍由方程(4.56)给出。通过对方程(4.81)和方程(4.82)取平均，并结合(4.42)，可得到薄膜变形的面外平衡方程

$$\frac{r'z'' - z'r''}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}(N_r + T_s) + \frac{z'}{r(r'^2 + z'^2)^{1/2}}(N_\theta + T_s) + p\mathcal{H}(R_c - R) = 0 \quad (4.83)$$

该结果与 Liu 等人^[61]关于润湿问题的研究以及 Rao 等人^[181]提出的液体鼓泡问题结果相一致。从物理意义上看，该结果可被理解为弹性薄膜平衡方程(4.55)与肥皂膜控制方程(4.2)的线性叠加。对方程(4.81)和(4.82)取差，并结合(4.42)，可得到薄膜变形的面内平衡方程；由于本小节考虑常数表面能密度，面内平衡方程仍保持为(4.57)。

根据上述平衡方程，在求解所需要的一阶控制方程组(4.64)中，仅来源于面外平衡方程的转角微分方程发生变化

$$\frac{d\phi}{dR} = \frac{p\mathcal{H}(R_c - R)R\lambda_\theta\lambda_r - \lambda_r(N_\theta + T_s)\sin\phi}{R\lambda_\theta(N_r + T_s)} \quad (4.84)$$

在满足平衡方程后，总自由能最小化条件（ $\delta\Pi = 0$ 且 $\delta R_c \neq 0$ ）中的剩余项可整理为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta\Pi}{2\pi r_c \delta r_c / \cos\phi(R_c^-)} \\ &= \underbrace{(N_r^+ + 2\gamma_{mv})(1 - \cos\theta_c) + \frac{t_0}{\lambda_r^- \lambda_\theta} \left[\frac{\partial W}{\partial \lambda_r} \Big|_{r=r_c^+} \Delta\lambda_r - \Delta W \right]}_{\text{Energy release rate: } G} - \underbrace{(\gamma_{mv} + \gamma_{sv} - \gamma_{ms})}_{\text{Adhesive toughness: } \Gamma_{ad}} \end{aligned} \quad (4.85)$$

该结果表明，界面黏附仍可按照其经典定义来描述，即单位面积上移除薄膜与球体的接触界面，并同时生成薄膜-气体界面与球体-气体界面所需的能量。此外，在 $\Delta\lambda_r = \Delta W = 0$ 的条件下，方程(4.85)可进一步简化为：

$$(N_r^+ + 2\gamma_{mv})(1 - \cos\theta_c) = \Gamma_{ad} \quad (4.86)$$

该简化形式对应于表面能的常数化，如考虑表面能对变形的依赖性，即 Shuttleworth 效应，则方程(4.85)中的连续性条件不再成立^[61,105]，其具体的影响将在后续章节中讨论。

将控制方程(4.84)和边界条件(4.86)纳入第4.4.2节中所给出的求解框架，可对考虑常

数表面张力的超弹性薄膜与刚性球体的黏附问题进行求解。得到薄膜张力的数值解后，外荷载拉力由接触线外侧的竖向平衡给出，即

$$F = 2\pi r_c(N_r^+ + 2\gamma_{mv}) \sin \phi(R_c^+) \quad (4.87)$$

由此得到脱粘过程中外力与位移及接触半径的关系，分别如图4.9(a)和(b)所示。结果表明，表面张力在增强薄膜刚度方面发挥着类似于预拉伸的作用，较大的表面张力使薄膜的力学响应趋于刚性化。但无论是超弹性薄膜还是无矩薄膜，脱粘力始终满足 $F_c = \pi\Gamma_{ad}R_s$ 。

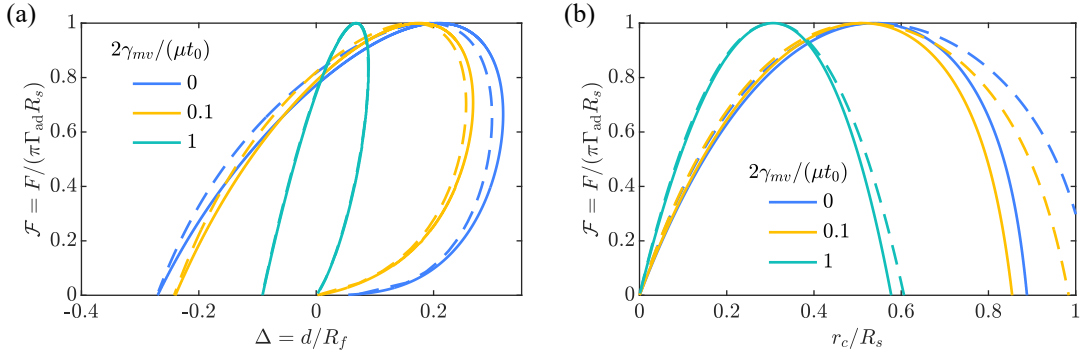


图 4.9 表面张力对薄膜拉脱行为的影响：(a) 不同无量纲表面张力下的力-位移曲线，实线表示采用精确球体几何形状的 Gent 型超弹性薄膜 ($J_m = 500$)，虚线表示采用抛物线近似球体形状的线性无矩薄膜，计算条件为 $R_f = 2R_s$ ， $\Gamma_{ad}/(\mu t_0) = 0.2$ 及 $\lambda_0 = 1$ ；(b) 不同无量纲表面张力下的力-接触半径曲线

4.6 薄膜黏附接触的有限元分析

本节对薄膜与刚性球体黏附接触体系的压痕及脱粘全过程进行模拟，通过不同的方式实现了二者之间的黏附接触。在此基础上，讨论了预拉伸、界面黏附及等效模量等参数对黏附行为的影响。

4.6.1 模拟方法

使用商用软件 ABAQUS2025 版本建立有限元模型。首先考虑大变形轴对称薄膜。为节省计算成本，设置刚性球体为解析刚体，半径为 1 mm。未变形状态下的薄膜为圆形薄片，初始半径为 3 mm，厚度 1 μm 。该薄膜被建模为轴对称可变形部件，采用二次轴对称壳单元 (SAX2) 进行均匀网格划分，通过非均匀网格对比 (球体半径区域内设置加密网格) 及网格密度变化进行网格无关性验证。薄膜材料参数采用不可压缩的 neo-Hookean 固体本构，剪切模量 $\mu = 2 \text{ MPa}$ 。模拟分为三个阶段，首先，对薄膜施加等双轴平面拉伸，变形幅值分别为 5%，10% 和 15%。其次，固定薄膜边界，对刚性球体施加位移边界条件，使其向下移动并与薄膜发生接触。内聚力接触需待界面建立后

才能激活，在接触半径增大时不产生黏附接触作用，因此下压阶段为无黏附赫兹接触，但该阶段可建立基准力-位移曲线，从而验证薄膜材料的超弹性大变形响应、单元类型和网格设置的合理性，以及接触算法的数值稳定性。最后，对刚性球体施加位移边界条件使其向上移动，在此过程中，通过典型的双线性黏结律（如图4.10(a)所示）模拟界面黏附。

ABAQUS 软件中，双线性黏结律的主要控制参数包括最大界面应力 σ_{\max} ，初始刚度系数 K 以及界面黏附能 Γ_{ad} 。本节对薄膜与刚性球之间的无摩擦 JKR 型黏附接触进行模拟，设置无剪切刚度系数 $K_{\text{ss}} = K_{\text{tt}} = 0$ ，最大界面应力取 $\sigma_{\max} \gtrsim 10 \text{ KPa}$ ，以触发超软薄膜的法向破坏并保证脱粘顺利发生。界面黏附能 Γ_{ad} 作为讨论的变量之一，其取值决定于所讨论的情况。此外，薄膜网格数量为 200 时计算已稳定收敛。

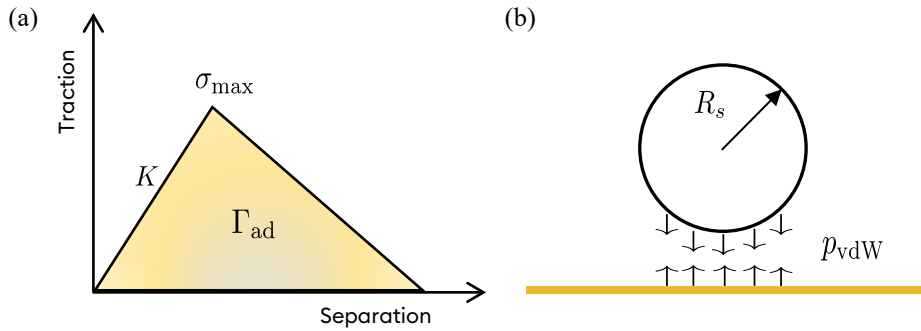


图 4.10 黏附作用的仿真方法：(a) 双线性黏结律内聚力接触模型；(b) 范德华相互作用

除采用内聚力模型外，考虑到界面黏附本质上来源于长程分子相互作用（如范德华力），本文进一步通过子程序直接引入范德华相互作用^[207]，以更物理的方式描述薄膜与刚性球体之间的吸引作用，如图4.10(b)所示。作用于球体上的拉力由整个相互作用区域内的范德华分布力积分得到，其法向分布形式为

$$p_{\text{vdW}}(s) = \frac{8\Gamma_{\text{ad}}}{3z_0} \left[\left(\frac{z_0}{s} \right)^3 - \left(\frac{z_0}{s} \right)^9 \right] \quad (4.88)$$

其中 s 为刚性球与薄膜之间的局部间距， z_0 为范德华力的平衡间距。该表达式满足平衡条件

$$p_{\text{vdW}}(z_0) = 0 \quad (4.89)$$

且界面能量满足

$$\int_{z_0}^{\infty} p_{\text{vdW}}(s) ds = \Gamma_{\text{ad}} \quad (4.90)$$

因此 Γ_{ad} 直接对应宏观界面黏附能。

在数值实现中，取典型平衡间距 $z_0 = 1 \text{ nm}$ 。薄膜建模为轴对称可变形结构，采用线弹性本构关系，杨氏模量 $E = 1000 \text{ GPa}$ ，厚度 $t = 0.5 \text{ nm}$ ，固定端半径为 $1.25 \mu\text{m}$ ，刚性球半径 $R_s = 1 \mu\text{m}$ ，界面黏附能设为 $\Gamma_{\text{ad}} = 0.1 \text{ N/m}$ 。上述参数量级与石墨烯等二维材

料相当。进一步估算体系弹性-黏附比可得

$$\lambda_T = \frac{\Gamma_{\text{ad}} R_s}{z_0 (T + \sqrt{\Gamma_{\text{ad}} E t})} \gg 1 \quad (4.91)$$

表明体系处于 JKR 极限区间^[140]，脱粘过程在物理上属于能量控制型黏附。上式中 T 为薄膜固定端附加张力，在本部分计算中设置为 0。

4.6.2 结果讨论

首先对大变形薄膜与刚性球体的接触问题中，内聚力接触的模拟结果进行讨论。图4.11展示了对应于不同预拉伸的模拟结果，界面黏附能固定为 $\Gamma_{\text{ad}} = 0.1\mu t_0$ ，散点和实线分别对应内聚力接触的有限元仿真结果与大变形框架下的初值问题数值求解。压痕阶段，数值计算与有限元模拟结果高度一致；脱粘阶段，有限元曲线出现局部跳跃并迅速回落至数值求解曲线，这是非线性内聚力接触模拟中常见的数值现象，反映了界面应力和能量的瞬时释放。随着预拉伸的增大，薄膜刚度提升，界面响应更稳定，有限元脱粘曲线逐渐趋近于连续的 ode 数值求解结果。对应于不同的预拉伸，模拟得到的无量纲脱粘力均满足 $F/(\pi\Gamma_{\text{ad}}R_s) \simeq 1$ 。

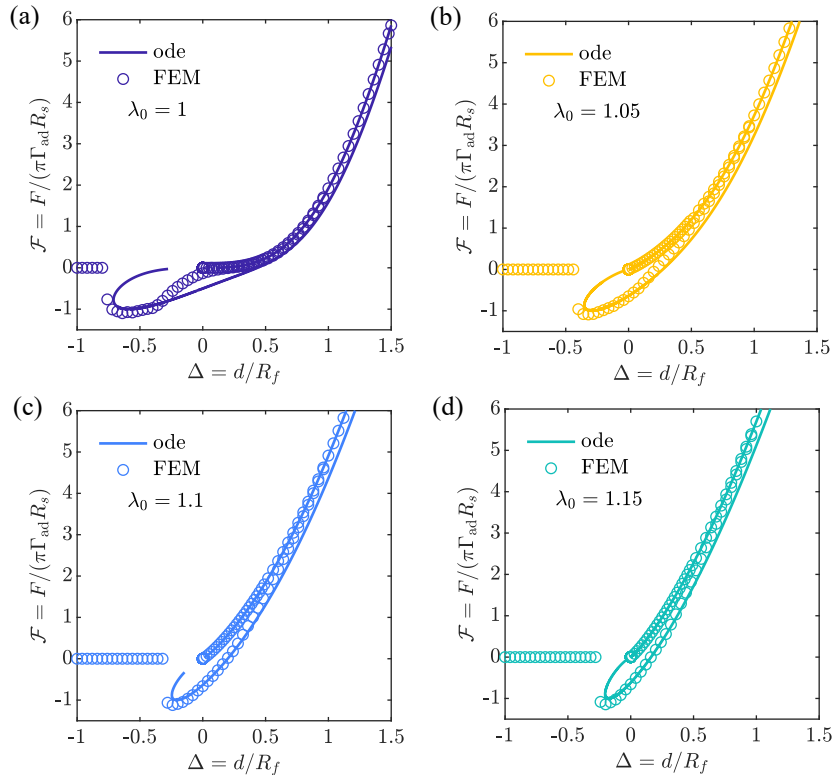


图 4.11 不同预拉伸条件的力-位移曲线：(a)-(d) 分别对应预拉伸 $\lambda_0 = 1, 1.05, 1.1, 1.15$ 。各组曲线计算条件均为 $R_f = 3R_s$

图4.12展示了预拉伸保持为 $\lambda_0 = 1.05$ 条件下，不同界面黏附能对应的模拟结果。实线为第4.4节初值问题的数值求解曲线。有限元模拟在脱粘阶段同样出现局部跳跃和回

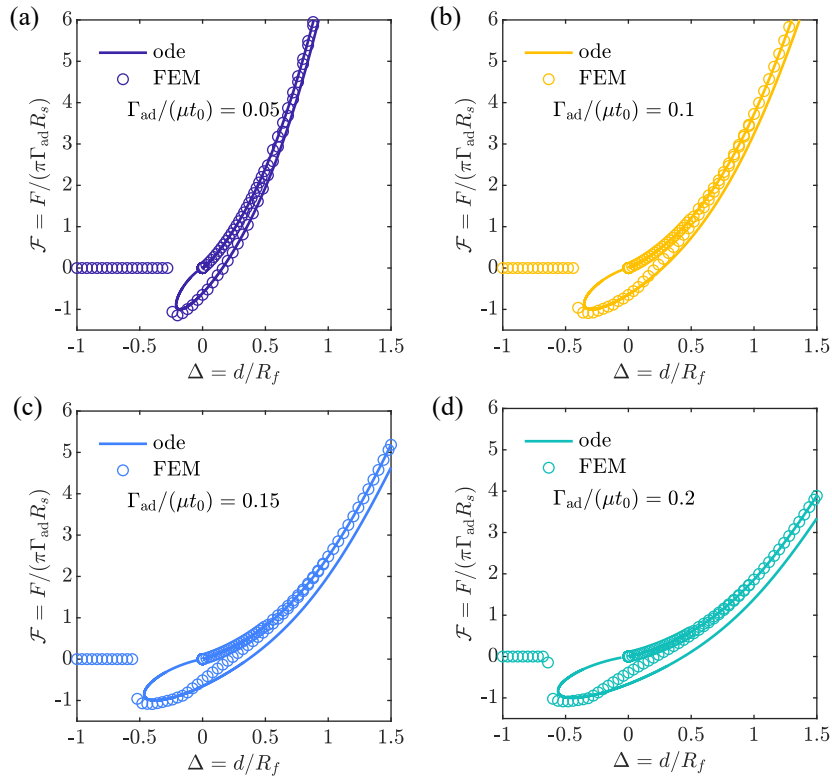


图 4.12 不同界面黏附能大小的力-位移曲线: (a)-(d) 分别对应黏附能 $\Gamma_{\text{ad}}/(\mu t_0) = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ 。各组曲线计算条件均为 $R_f = 3R_s$

落现象，且界面黏附能越大，该数值波动越明显。尽管如此，对于不同界面黏附能，脱粘力均符合能量控制的 JKR 型规律，即无量纲脱粘力满足 $F/(\pi\Gamma_{\text{ad}}R_s) \simeq 1$ 。

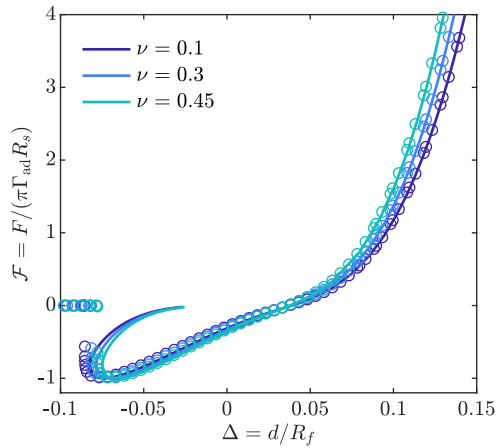


图 4.13 不同泊松比对应的脱粘过程力-位移曲线: 实线和散点分别为基于无矩薄膜理论の数値解和有限元仿真结果

进一步，利用范德华相互吸引模拟线弹性薄膜与刚性球体之间的黏附行为，对线弹性薄膜的泊松比进行讨论。图4.13给出了仿真结果与无矩薄膜理论计算结果的对比。对于该薄膜构型，泊松比的变化等效于改变膜的有效面内刚度；泊松比越大，薄膜整体

响应越硬。模拟结果显示，不同泊松比下的压痕-脱粘曲线与理论解吻合良好。尽管薄膜刚度发生变化，在 JKR 型能量控制黏附条件下，系统的脱粘力并不依赖具体材料参数，各组结果均满足 $F/(\pi\Gamma_{\text{ad}}R_s) \simeq 1$ ，表明脱粘力由界面能 Γ_{ad} 与几何尺度 R_s 所控制，而与薄膜的弹性常数无关。

4.7 本章小结

本章详细分析了三类轴对称悬浮薄膜与刚性球体的黏附接触问题，得到了统一的脱粘力形式。首先解析求解了肥皂薄膜的最小曲面方程，参照剥离问题中能量释放率的概念，定义了肥皂薄膜与刚性球体接触线处的界面黏附。针对无矩薄膜的黏附，基于严格的总势能变分分析，讨论了接触区域共形接触的几何非线性对脱粘力影响，强调了 Föppl-von Kármán 理论框架下一致性几何非线性描述的重要性。超弹性薄膜黏附体系中同时存在变形几何非线性与材料非线性。在大变形框架下，同样基于总势能变分分析，推导了大变形超弹性薄膜黏附体系的平衡方程和自然边界条件，将边值问题转化为初值问题进行数值求解，讨论了薄膜尺寸、预拉伸等因素对黏附过程薄膜力-位移曲线及脱粘力的影响。此外，在大变形超弹性薄膜的黏附接触体系下，基于总自由能最小化原理进一步讨论了常数表面张力对薄膜拉脱行为的影响。通过有限元仿真对薄膜-刚性球体的压痕、脱粘全过程进行模拟，对于超弹性薄膜，采用内聚力黏度率，讨论了不同预拉伸和黏附能条件下的黏附接触行为；对于线弹性薄膜，采用范德华相互吸引作用的直接描述，对不同泊松比（等效模量）的薄膜黏附力学行为进行了模拟。上述多种条件下，有限元仿真结果与理论计算结果相一致，说明了理论分析的可靠性。通过对三类代表性薄膜体系的分析，得到了薄膜与刚性球体黏附接触的稳定脱粘力 $\pi\Gamma_{\text{ad}}R_s$ ，该脱粘力仅与界面黏附能和球体尺寸有关，独立于材料本构和变形描述。

第五章 非线性弹性薄膜表界面问题的变分理论

5.1 引言

在可变形固体与其他介质的接触问题中，固体弹性与表界面作用的耦合现象已得到广泛的研究。与液气界面或不同液体之间的接触相比，固体界面的表面弹性性质，即类似于体弹性的表面本构关系，使得接触问题复杂性大为增加。经典的 Shuttleworth 理论最早阐述了固体材料表面应力的概念，其从热力学概念出发分析了固体表面与液体表面的区别，并推导了热力学形式的 Shuttleworth 方程以描述固体表面能对面积和变形的双重依赖性^[34]。在此基础上，Gurtin 和 Murdoch^[208]建立了表面弹性理论（G-M 模型），将表面能的应变依赖关系推广为张量形式的表面弹性本构，并推导了相应的平衡方程。表面弹性的力学表征使其在接触力学领域成为可分析的力学效应，例如，在刚体与可变形体的无黏附接触（Hertz 或 Boussinesq 接触）问题中，表面张力提供了额外的抵抗变形的能量，使接触半径、接触深度和应力等发生改变^[209-210]；在膜基结构的压痕问题中，表面张力也存在类似的作用^[143]。

上述研究主要聚焦于表面弹性对材料等效力学性质的影响，对于接触问题，接触线处的局部力学行为也尤为重要。以润湿问题为背景的接触线研究最为广泛。1996 年，Olives^[211]利用严格的变分方法研究了液滴在边界固定薄板上的润湿问题，体系总能量包含了依赖于应变的表面拉伸能和表面弯曲能，由此得到修正的杨氏方程，强调了表面效应导致的拉伸、弯曲变形跳跃。同样考虑拉伸、弯曲及表面弹性，Neukirch 等人^[212]研究了边界自由的薄板与液滴的接触，证明了在该构型下，表面弹性依旧会在接触线处引发变形不连续性。与此同时，针对软物质与液滴的接触，Weijs 等人^[54]指出软材料接触线处形成的润湿脊体现了液体表面张力、固体表面应力与体弹性之间的多尺度力学平衡。Snoeijer 等人^[187]进一步指出，润湿接触线的宏观接触角对应固定接触线的液滴界面变分，决定液滴整体形状；而微观接触线力学平衡对应接触线位置及固体表面形变的变分，决定润湿脊形状与局部角度。上述研究详细阐述了与润湿接触线有关的能量方法与力学理论，但多数针对孤立的接触线；由于平衡方程与接触条件的复杂性，往往通过解析、半解析方法求解，或通过实验方法验证，很难全面描述接触系统的表面弹性效应。基于这一问题，Henkel 等人^[213]提出了液滴与软材料的全局耦合理论，该理论包括两种建模方法，其一为宏观 neo-Hookean 模型，结合 Shuttleworth 效应，用于分析非孤立液滴的全场弹性响应；其二为介观的梯度动力学模型，用于揭示 Shuttleworth 效应对水平位移场的显著影响，并可基于此预测液滴在软物质上的扩展或滑动速度。而针对薄膜的表面弹性接触问题，Liu 等人^[61]从能量变分的物理概念出发，考虑了液滴

与薄膜的全局耦合变形，阐明了液滴在非线形薄膜上的润湿平衡状态。

然而，在固体接触构型中，关于表面弹性效应的研究仍主要集中于刚体与可变形基底之间的接触情形^[82,191-192,214-218]，非线性薄膜变形与界面接触耦合情形下的表面弹性效应研究较为有限，对不同界面问题在变分框架下的一致性描述亦缺乏理论刻画。基于此，本章将接触问题的变分方法与表面弹性理论相结合，建立适用于非线性弹性薄膜表界面问题的变分框架。以刚体与悬浮薄膜之间的黏附接触为典型算例，对该框架下的力学行为与变分结构进行分析，并讨论其适用范围与一致性特征。本章的结构如下：第2节针对包含表面弹性与接触界面的固体体系，给出两种变分形式（场变分与几何变分）及对应能量变分推导；第3节以任意形状的刚体-薄膜黏附接触问题为例，阐述具体接触情境下能量变分的实现过程，推导薄膜体弹性与表面弹性共同作用下的域内平衡方程及接触线的力学与能量平衡判据，讨论其与断裂及黏附判据的关系，进一步，从变分结构角度说明固固与固液界面问题的内在一致性；第4节针对具体的轴对称接触模型分析表面弹性对悬浮薄膜与刚体脱粘行为的影响；第5节对全章内容进行总结。

5.2 非线性表面弹性体系的动边界变分框架

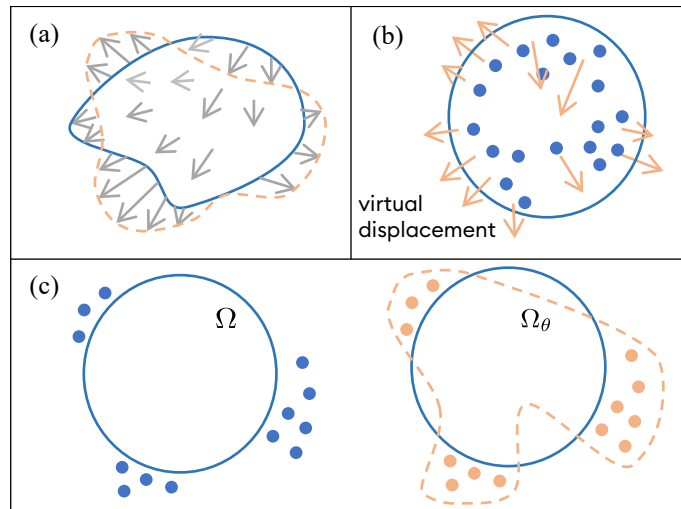


图 5.1 含可动边界的固体材料变分示意图：(a) 变形体系的变分构型，在给定的平衡构型（蓝色实线）上对体系施加全变分（同时包含场变分与几何变分），得到的变分构型以橙色虚线表示，此时积分域发生改变，材料点亦发生虚位移；(b) 场变分示意图，在参考构型下保持积分域不变，仅对场变量施加虚扰动，橙色箭头表示材料点的虚位移分布；(c) 几何变分示意图，在参考构型下保持场变量不变，仅对积分域施加几何扰动，橙色虚线表示几何变分后重新划定的积分域

对于含可动边界的体系，总变形能可表示为定义在几何域上的能量泛函

$$\mathcal{E}(\varphi, \Omega) = \int_{\Omega} W(\nabla\varphi) d\Omega \quad (5.1)$$

其中 φ 为参考构型到变形构型的映射， Ω 为参考构型下体系所占有的几何域， $W(\nabla\varphi)$

为应变能密度函数。由于能量泛函不仅显式依赖于场变量 φ ，同时也依赖于积分域 Ω ，因此其变分应理解为对密度函数与几何域的联合扰动

$$\delta \mathcal{E} = \delta_{\varphi} \mathcal{E}(\varphi, \Omega)[\delta \varphi] + \delta_{\Omega} \mathcal{E}(\varphi, \Omega)[\theta] \quad (5.2)$$

其中 $\delta_{\varphi} \mathcal{E}(\varphi, \Omega)[\delta \varphi]$ 表示在固定几何域上的场变分，反映能量密度随场变量变化引起的能量改变，如图5.1(b)所示； $\delta_{\Omega} \mathcal{E}(\varphi, \Omega)[\theta]$ 表示由几何域扰动向量场 θ 引起的几何变分，反映积分域或界面形状变化导致的能量改变，如图5.1(c)所示。

在既有研究中，对体系能量变分的处理方式存在差异。一类工作在严格的力学框架下，将场变分与几何变分统一纳入变形映射的整体变分，形式紧凑，揭示了构型力与能量释放率的关系^[181]；另一类工作从物理场景出发，总能量的变化被解释为材料内部弹性能变化与界面几何变化所引起的能量变化之和，具有直观的物理意义^[61]。本节分析将二者相结合，明确了两种变分的物理意义，并在连续介质力学框架下给出一般形式的变分推导。

5.2.1 场变分

本小节推导含表面弹性的固体材料的场变分。为了直观说明能量变化如何随场变量扰动而产生，首先考虑液体体系作为示例。考虑体积 $v \subset \mathbb{R}^3$ 、边界 $a = \partial v$ 的液体系统。液体没有剪切刚度，界面能仅依赖面积，其变形能可表示为

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \gamma \int_a da(\mathbf{x}) \quad (5.3)$$

上式中 \mathbf{x} 为液体材料点的位置场， γ 为各向同性均匀表面张力。液体系统总能量还包括液体内部均匀压力 p 引起的外力功，即

$$\Pi(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{x}) - \int_v p dv \quad (5.4)$$

对应材料点位置场微小扰动 $\delta \mathbf{x}$ 的能量变分为

$$\delta \Pi = - \int_a p \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} da + \int_a 2\gamma H (\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) da \quad (5.5)$$

上式中，在压力 p 为空间常数的条件下，体积分的变分通过 Reynolds 输运定理转化为边界通量形式。由能量最小化条件 $\delta \Pi = 0$ 得到液体界面平衡方程 $p = 2\gamma H$ ，即对应于常数张力表面的 Young-Laplace 方程。

与液体不同，固体能储存弹性能，其界面能依赖变形状态，因此需将体与界面分别建模，将界面视作独立弹性的二维连续体。在参考构型下，固体体积为 $\mathbf{B}_0 \subset \mathbb{R}^3$ ，边界为规则曲面 $\partial \mathbf{B}_0$ 。设部分表面 $\mathbf{S}_0 \subset \partial \mathbf{B}_0$ 具有表面弹性，且边界光滑，记为 $\partial \mathbf{S}_0$ 。材料点在参考构型 \mathbf{B}_0 和当前构型 \mathbf{B} 中的位置分别为 \mathbf{X} 和 $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$ ，其中 $\varphi: \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}$ 为变形映射，相应的体变形梯度定义为

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi \quad (5.6)$$

边界材料点随体变形共同运动，表面变形映射由体变形在边界上的限制给出：

$$\varphi_s := \varphi|_{\partial B_0}, \quad \varphi_s : \partial B_0 \rightarrow \varphi(\partial B_0) \quad (5.7)$$

在参考表面 S_0 上，引入单位法向 \mathbf{N} ，并定义切向投影算子 $\mathbf{I}_s = \mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}$ 。表面梯度算子可表示为三维梯度在切空间上的投影，即 $\nabla_s(\cdot) = \mathbf{I}_s \nabla(\cdot)$ ，相应的表面变形梯度为

$$\mathbf{F}_s = \nabla_s \varphi \quad (5.8)$$

该定义保证表面变形仅描述沿表面切向的几何变化。

固体的变形能包括体弹性能和表面弹性能

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_b + \mathcal{E}_s = \int_{B_0} W_b(\mathbf{F}) dV + \int_{S_0} W_s(\mathbf{F}_s) dA \quad (5.9)$$

上式中 W_b 和 W_s 分别表示体和表面弹性能量密度。总能量还包括外力势能，即

$$\Pi = \mathcal{E} - \int_{B_0} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{b} dV - \int_{\partial B_0} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{s} dA \quad (5.10)$$

上式中 \mathbf{b} 和 \mathbf{s} 分别表示作用在固体上的体积力和表面力。

对应于材料点的虚位移 $\delta\varphi$ ，固体变形能的场变分可定义为

$$\delta_\varphi \mathcal{E}[\varphi; \delta\varphi] = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{E}[\varphi + t\delta\varphi] \right|_{t=0} \quad (5.11)$$

该变分与流体体系的位移扰动变分类似，描述虚位移引起的能量增量。由于体和表面弹性能实际上依赖于体和表面变形梯度 \mathbf{F} 和 \mathbf{F}_s ，可通过链式法则将位移形式的场变分转化为梯度形式：

$$\delta_\varphi \mathcal{E}_b = \int_{B_0} \frac{\partial W_b}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} dV, \quad \delta_\varphi \mathcal{E}_s = \int_{S_0} \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{F}_s} : \delta \mathbf{F}_s dA \quad (5.12)$$

将第一 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{P} = \partial W_b / \partial \mathbf{F}$ 及局部应变梯度增量 $\delta \mathbf{F} = \nabla \delta\varphi$ 代入体弹性场变分 $\delta_\varphi \mathcal{E}_b$ ，得到

$$\begin{aligned} \delta_\varphi \mathcal{E}_b &= \int_{B_0} (\mathbf{P} : \nabla(\delta\varphi)) dV \\ &= - \int_{B_0} \delta\varphi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) dV + \int_{\partial B_0} \delta\varphi \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}) dA \end{aligned} \quad (5.13)$$

上式应用了散度定理， \mathbf{N} 指示边界表面 ∂B_0 上的外法向。将第一 Piola-Kirchhoff 表面张力 $\mathbf{P}^s = \partial W_s / \partial \mathbf{F}_s$ 及表面变形梯度增量 $\delta \mathbf{F}_s = \nabla_s \delta\varphi$ 代入表面弹性能的场变分 $\delta_\varphi \mathcal{E}_s$ ，得到

$$\begin{aligned} \delta_\varphi \mathcal{E}_s &= \int_{S_0} (\mathbf{P}^s : \nabla_s(\delta\varphi)) dA \\ &= - \int_{S_0} \delta\varphi \cdot (\nabla_s \cdot \mathbf{P}^s) dA + \int_{\partial S_0} \delta\varphi \cdot (\mathbf{P}^s \cdot \mathbf{M}) dL \end{aligned} \quad (5.14)$$

其中 $\nabla_s \cdot (\cdot)$ 表示表面散度算子， \mathbf{M} 为边界 ∂S_0 上曲面切平面内的外法向。

$\delta\varphi$ 所引起的外力势能变分可直接计算为 $-\int_{B_0} \delta\varphi \cdot \mathbf{b} dV - \int_{\partial B_0} \delta\varphi \cdot \mathbf{s} dA$ ，将其与方

程(5.13)、(5.14)叠加, 得到总能量的一阶变分表达式

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & - \int_{B_0} \delta\varphi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b}) dV + \int_{\partial B_0 \setminus S_0} \delta\varphi \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{s}) dA + \int_{S_0} \delta\varphi \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{s}) dA \\ & - \int_{S_0} \delta\varphi \cdot (\nabla_s \cdot \mathbf{P}^s) dA + \int_{\partial S_0} \delta\varphi \cdot (\mathbf{P}^s \cdot \mathbf{M}) dL \end{aligned} \quad (5.15)$$

将该变分表达式代入能量最小化条件 $\delta\Pi = 0$ 可得系统的平衡条件。

首先, 由体积分项可得参考构形下的体内平衡方程

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } B_0 \quad (5.16)$$

其次, 在不具有表面弹性的边界 $\partial B_0 \setminus S_0$ 上, 由边界积分项得到力边界条件

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{s} \quad (5.17)$$

对于具有表面弹性的边界部分 $S_0 \subset \partial B_0$, 体应力给出的牵引与表面应力的散度共同参与力的平衡, 有

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} - \nabla_s \cdot \mathbf{P}^s = \mathbf{s} \quad \text{on } S_0 \quad (5.18)$$

最后, 在表面边界曲线 ∂S_0 上, 由线积分项得到表面边界条件

$$\mathbf{P}^s \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (5.19)$$

其中假定表面边界上不存在线力作用。

以上内容给出了固体材料体弹性与表面弹性共同作用的一般性分析框架。特别地, 在无外加表面力的情况下, 将方程(5.18)推到当前构型, 可得到欧拉形式的边界平衡条件

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \nabla_s \cdot \boldsymbol{\Upsilon} \quad (5.20)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 分别是体柯西应力与表面柯西应力, \mathbf{n} 为当前构型中的单位外法线向量。当体柯西应力退化为各向同性的均匀正压力 $p\mathbf{I}$, 而表面柯西应力退化为各向同性的均匀表面张力 $\gamma\mathbf{I}_s$, 方程(5.20)即退化为流体界面的 Young-Laplace 方程。

5.2.2 几何变分

与场变分不同, 几何变分关注的是积分域或界面形状的变化。仍首先考虑体积 $v \subset \mathbb{R}^3$ 、边界 $a = \partial v$ 的液体系统, 其总能量为方程(5.4)。设界面沿法向发生微小扰动

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_t = \mathbf{x} + t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (5.21)$$

其中 t 为小参数, $\boldsymbol{\omega}$ 为定义在界面上的光滑标量函数, \mathbf{n} 为单位外法向。该扰动使流体表面的薄层体积发生变化, 根据扫掠体积的几何计算公式, 有

$$\delta \int_v p dv = \int_a p \boldsymbol{\omega} da \quad (5.22)$$

根据曲面几何基本公式，流体面积元的变化满足

$$\delta \int_a da = \int_a 2H\omega da \quad (5.23)$$

基于总自由能最小化条件，流体界面扰动变分依旧得到 Young-Laplace 方程 $p = 2\gamma H$ 。可以看到，在液体体系中，几何变分与场变分在一阶变分意义下是等价的。这种等价性来源于体积分在域变形下的变分可通过 Reynolds 输运定理转化为边界通量项，从而与界面形变的贡献相统一。

连续介质力学中，形状微分理论用于刻画泛函对几何域或界面变化的敏感性，其中，Hadamard 形状导数^[219] 将几何变化引入能量泛函的参数化表达，通过求导将几何扰动映射为能量的一阶响应，为几何变分的推导提供了基本框架。在固体体系中，能量泛函既可能定义在体积域，也可能定义在边界表面，因此几何变分需要分别考虑三维（体积）和二维（表面）积分的扰动贡献。首先以体弹性能泛函 $\mathcal{E}_b = \int_{B_0} W_b(\mathbf{F}) dV$ 为例推导三维几何积分。对体积域 $B_0 \subset \mathbb{R}^d$ 引入扰动映射

$$\Psi_t(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + t\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}), \quad t \rightarrow 0 \quad (5.24)$$

扰动后的域为

$$B_t = \Psi_t(B_0) \quad (5.25)$$

形状导数定义为

$$\delta_{\Omega} \mathcal{E}(B_0)(\boldsymbol{\theta}) = \left. \frac{d}{dt} \int_{B_t} W_b(\mathbf{F}) dv \right|_{t=0} \quad (5.26)$$

利用变量替换，可以将积分写为

$$\int_{B_t} W_b(\mathbf{F}) dv = \int_{B_0} W_b(\mathbf{F}) \det(\nabla \Psi_t(\mathbf{X})) dV \quad (5.27)$$

其中 $\nabla \Psi_t = \mathbf{I} + t \nabla \boldsymbol{\theta} + o(t)$ ，且 $\det(\nabla \Psi_t) = 1 + t \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + o(t)$ 。将积分一阶展开得到

$$\int_{B_t} W_b(\mathbf{F}) dv = \int_{B_0} W_b(\mathbf{F}) dV + t \int_{B_0} (\nabla W_b(\mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\theta} + W_b(\mathbf{F}) \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) dV + o(t) \quad (5.28)$$

将其代入定义式(5.26)得到几何变分

$$\delta_{\Omega} \mathcal{E}(B_0)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{B_0} W_b(\mathbf{F}) \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} dV \quad (5.29)$$

在此过程中只考虑几何扰动对变分的影响，材料变形统一在场变分中考虑，因此，变分过程中能量密度项和 $\nabla W_b(\mathbf{F})$ 项不属于几何扰动贡献。方程(5.29)可进一步通过散度定理处理，从而得到体积模式的最终形状导数

$$\delta_{\Omega} \mathcal{E}(B_0)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial B_0} W_b(\mathbf{F}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{N}) dA \quad (5.30)$$

由此可以看出，体积泛函在形状扰动下的贡献最终归结为边界法向移动。

类似地，以表面弹性能泛函 $\mathcal{E}_s = \int_{S_0} W_s(\mathbf{F}_s) dA$ 为例讨论二维几何变分。对参考构型

中的曲面 $S_0 \subset \mathbb{R}^d$ 引入扰动映射 $\Psi_t(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + t\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})$, 扰动后曲面为 $S_t = \Psi_t(S_0)$, 对应形状导数为

$$\delta_{\Omega} \mathcal{E}_s(S_0)(\boldsymbol{\theta}) := \left. \frac{d}{dt} \int_{S_t} W_s(\mathbf{F}_s) da \right|_{t=0} \quad (5.31)$$

参考构型下的面积元变化可以写为

$$da = (1 + t \nabla_s \cdot \boldsymbol{\theta}) dA + o(t) \quad (5.32)$$

其中 $\nabla_s \cdot \boldsymbol{\theta}$ 为曲面散度。对参考域的积分计算形状导数, 得到

$$\delta_{\Omega} \mathcal{E}_s(S_0)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{S_0} W_s(\mathbf{F}_s) (\nabla_s \cdot \boldsymbol{\theta}) dA \quad (5.33)$$

几何扰动 $\boldsymbol{\theta}$ 可分解为面内切向分量 $\boldsymbol{\theta}_{\parallel}$ 和法向分量 $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{N}}$ 。法向扰动对面积元的一阶变化由曲率控制:

$$\nabla_s \cdot \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{N}} = (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{N}) \nabla_s \cdot \mathbf{N} = 2H(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{N}) \quad (5.34)$$

其中, H 为固体表面平均曲率。切向扰动 $\boldsymbol{\theta}_{\parallel}$ 仅沿曲面滑动, 不改变面积元 dA , 其贡献通过曲面散度定理转化为边界积分:

$$\int_{S_0} \nabla_s \cdot (W_s(\mathbf{F}_s) \boldsymbol{\theta}_{\parallel}) dA = \int_{\partial S_0} W_s(\mathbf{F}_s) (\boldsymbol{\theta}_{\parallel} \cdot \mathbf{M}) dL \quad (5.35)$$

其中 \mathbf{M} 为参考构型中的面内外法向量, 上式推导中使用了乘法法则 $W_s(\mathbf{F}_s) (\nabla_s \cdot \boldsymbol{\theta}_{\parallel}) = \nabla_s \cdot (W_s(\mathbf{F}_s) \boldsymbol{\theta}_{\parallel}) - \nabla_s W_s(\mathbf{F}_s) \cdot \boldsymbol{\theta}_{\parallel}$ 。将方程(5.34)与(5.35)代回(5.33), 得到二维几何变分的最终形式

$$\delta_{\Omega} \int_{S_0} W_s(\mathbf{F}_s) dA = \int_{S_0} 2H W_s(\mathbf{F}_s) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{N}) dA + \int_{\partial S_0} W_s(\mathbf{F}_s) (\boldsymbol{\theta}_{\parallel} \cdot \mathbf{M}) dL \quad (5.36)$$

该方程中, 薄膜能量对几何域的一阶响应被分解为法向扰动引起的曲率面积积分, 以及边界移动引起的边界积分, 是 Hadamard 形状导数在薄膜构型的具体体现。

综上, 场变分揭示了体弹性与表面弹性的应力分布规律; 几何变分则说明了边界扰动如何驱动能量变化。在含有可动边界的固体体系中, 这两类变分互为补充, 共同构建能量最小化框架。基于此, 本章接下来将建立适用于大变形薄膜与不同介质黏附接触的能量变分理论, 同时考虑薄膜体弹性、表面弹性及界面几何约束, 实现对应力分布和界面驱动力的全面描述。

5.3 非线性表面弹性薄膜的接触与界面平衡

本节首先以任意形状薄膜与刚体黏附接触问题为背景, 建立考虑表面弹性的薄膜接触问题能量分析框架。结合第5.2节推导的场变分与几何变分方法进行能量变分计算, 从而得到体系的平衡方程与自然边界条件。在此基础上, 基于悬浮薄膜润湿模型和弹性润湿模型说明该理论在薄膜与不同介质接触场景下的普适性。

5.3.1 薄膜-刚体接触的能量变分

本小节讨论图5.2所示的任意形状薄膜-刚体接触问题，包含薄膜大变形与表面弹性，通过能量最小化方法进行推导。考虑足够薄的薄膜与刚体的接触，薄膜可以承受任意的拉伸变形，弯曲效应可忽略，薄膜中面可作为代表性平面，用于描述薄膜变形及相关物理量。标记物质点在参考构型与当前构型中的位置向量分别为 \mathbf{X} 和 $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$ ， φ 为变形映射，由此得到表面变形梯度张量 $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$ 。记薄膜与刚体的接触区域为 \mathbf{I} ，非接触区域为 \mathbf{O} ，对应参考构型中的接触区域与非接触区域分别为 \mathbf{I}_0 和 \mathbf{O}_0 ，如图5.2所示。定义薄膜的初始状态为无刚体接触，可以平坦或具有一定的曲率，但曲率必须连续，如图5.2(a)。

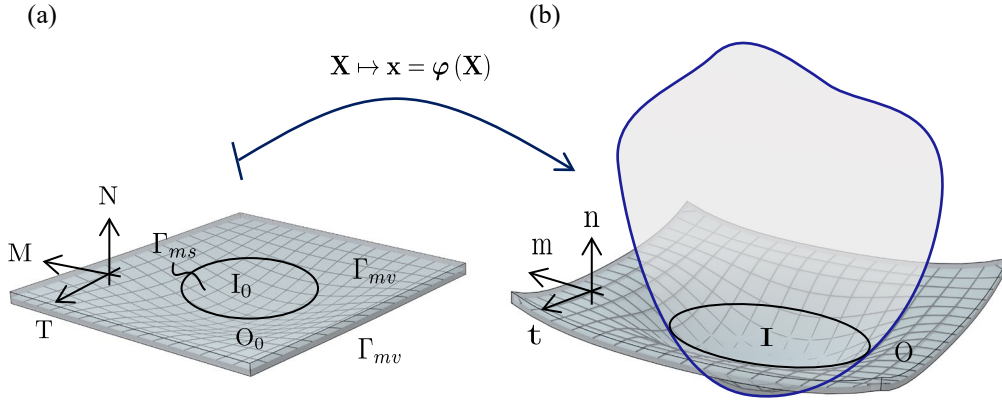


图 5.2 薄膜-刚体接触变形示意图：(a) 参考构型；(b) 当前构型

薄膜接触体系的总自由能包括体弹性能及薄膜与其他介质接触的界面能，界面能被建模为作用于薄膜上下表面的零厚度界面，参考构型中的界面能密度记为 $\Gamma(\mathbf{F})$ 。本小节以悬浮薄膜与刚性固体的接触为例进行能量分析，薄膜接触区域上下两侧界面能分别为 $\Gamma_{ms}(\mathbf{F}_1)$ 和 $\Gamma_{mv}(\mathbf{F}_1)$ ，非接触区域上下两侧界面能均为 $\Gamma_{mv}(\mathbf{F}_0)$ ， \mathbf{F}_1 和 \mathbf{F}_0 分别是接触区域和非接触区域的变形梯度张量，下标 m, s, v 分别对应薄膜，固体及空气。由于薄膜足够薄，可将三维体弹性能量密度 $W_b(\mathbf{F})$ 与参考构型厚度 t_0 相乘，得到等效的薄膜弹性能密度 $W(\mathbf{F}) = t_0 W_b(\mathbf{F})$ 。由此，系统的总自由能可在参考构型中计算为

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\mathbf{I}_0} [W(\mathbf{F}_1) + \Gamma_{ms}(\mathbf{F}_1) + \Gamma_{mv}(\mathbf{F}_1)] dA + \int_{\mathbf{O}_0} [W(\mathbf{F}_0) + 2\Gamma_{mv}(\mathbf{F}_0)] dA \\ & + \gamma_s (A_{\text{rig}} - a_1) - \int_{\mathbf{I}} \mathbf{p} \cdot (\varphi - \varphi_{\text{rig}}) da \end{aligned} \quad (5.37)$$

上式中， γ_s 为刚体的表面能密度， A_{rig} 为刚体总表面积， a_1 为变形后接触区域的面积。 Π 中最后一项是用于描述刚体与薄膜之间共形接触的 Lagrange 乘子项， \mathbf{p} 为 Lagrange 乘子， φ_{rig} 是刚体表面在当前构型中的空间位置向量。

薄膜-刚体体系的平衡构型通过最小化总自由能得到，其必要条件是 $\delta \Pi = 0$ 。方

程(5.37)的第一行是体系弹性应变能, 记为 \mathcal{E} , 根据方程(5.14)可计算其场变分:

$$\begin{aligned} \delta\varphi\mathcal{E} = & - \int_{I_0} \delta\varphi \cdot [\nabla_s \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{P}_{ms}^s + \mathbf{P}_{mv}^s)] dA + \int_{\partial I_0} \delta\varphi \cdot [(\mathbf{P} + \mathbf{P}_{ms}^s + \mathbf{P}_{mv}^s) \cdot \mathbf{M}_I] dL \\ & - \int_{O_0} \delta\varphi \cdot [\nabla_s \cdot (\mathbf{P} + 2\mathbf{P}_{mv}^s)] dA + \int_{\partial O_0} \delta\varphi \cdot [(\mathbf{P} + 2\mathbf{P}_{mv}^s) \cdot \mathbf{M}_O] dL \end{aligned} \quad (5.38)$$

上式中, \mathbf{P} 表示第一 Piola-Kirchhoff 薄膜张力, \mathbf{P}_{mv}^s 和 \mathbf{P}_{ms}^s 分别表示薄膜-空气界面与薄膜-刚体界面的第一 Piola-Kirchhoff 表面张力, \mathbf{M}_I 和 \mathbf{M}_O 分别为参考构型中接触区域和非接触区域在接触线边界的外法向量。根据第一 Piola-Kirchhoff 张力与当前构型中柯西张力 (薄膜张力 \mathbf{N} 与表面张力 $\boldsymbol{\Upsilon}$) 的关系

$$\mathbf{P} = J\mathbf{N}\mathbf{F}^{-T}, \mathbf{P}^s = J\boldsymbol{\Upsilon}\mathbf{F}^{-T} \quad (5.39)$$

及 Nanson 公式^[29] $\mathbf{m}dl = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{M}dL$, 可将场变分前推至当前构型

$$\begin{aligned} \delta\varphi\mathcal{E} = & - \int_I \delta\varphi \cdot [\nabla_{s^*} \cdot (\mathbf{N} + \boldsymbol{\Upsilon}_{ms} + \boldsymbol{\Upsilon}_{mv})] da + \int_{\partial I} \delta\varphi \cdot [(\mathbf{N} + \boldsymbol{\Upsilon}_{ms} + \boldsymbol{\Upsilon}_{mv}) \cdot \mathbf{m}_I] dl \\ & - \int_O \delta\varphi \cdot [\nabla_{s^*} \cdot (\mathbf{N} + 2\boldsymbol{\Upsilon}_{mv})] da + \int_{\partial O} \delta\varphi \cdot [(\mathbf{N} + 2\boldsymbol{\Upsilon}_{mv}) \cdot \mathbf{m}_O] dl \end{aligned} \quad (5.40)$$

上式中, ∇_{s^*} 为当前构型下的表面梯度算子, \mathbf{m}_I 和 \mathbf{m}_O 分别是变形后薄膜表面接触区域和非接触区域的外法线单位向量。

接下来考虑薄膜接触区域与非接触区域之间的转变所引起的几何变分, 记参考构型中接触线的位置变化为 $\Delta\mathbf{X}_c$, 其物理意义为曲面上接触区域与非接触区域的重新划分, 即标记材料点属于接触或非接触区域, 并非薄膜的空间形变, 因此满足 $\Delta\mathbf{X}_c \cdot \mathbf{N} = 0$ 。根据方程(5.36), 有

$$\begin{aligned} \delta\Omega\mathcal{E} = & \int_{\partial I_0} [W(\mathbf{F}_I) + \Gamma_{ms}(\mathbf{F}_I) + \Gamma_{mv}(\mathbf{F}_I)] (\Delta\mathbf{X}_c \cdot \mathbf{M}_I) dL \\ & + \int_{\partial O_0} [W(\mathbf{F}_O) + 2\Gamma_{mv}(\mathbf{F}_O)] (\Delta\mathbf{X}_c \cdot \mathbf{M}_O) dL \end{aligned} \quad (5.41)$$

结合 Nanson 关系对边界几何量的转换, 上式可映射到当前构型

$$\begin{aligned} \delta\Omega\mathcal{E} = & \int_{\partial I} [w(\mathbf{F}_I) + \gamma_{ms}(\mathbf{F}_I) + \gamma_{mv}(\mathbf{F}_I)] \mathbf{m}_I \cdot (\mathbf{F}_I \cdot \Delta\mathbf{X}_c) dl \\ & + \int_{\partial O} [w(\mathbf{F}_O) + 2\gamma_{mv}(\mathbf{F}_O)] \mathbf{m}_O \cdot (\mathbf{F}_O \cdot \Delta\mathbf{X}_c) dl \end{aligned} \quad (5.42)$$

以上给出了总自由能中弹性应变能的变分。下面将对薄膜-刚体体系在扰动作用下, 总自由能中的其余项进行变分分析。对于共形接触的约束项

$$- \int_I \mathbf{p} \cdot (\varphi - \varphi_{\text{rig}}) da \quad (5.43)$$

Lagrange 乘子的变分 $\delta\mathbf{p}$ 恢复共形接触条件 $\varphi = \varphi_{\text{rig}}$, 而材料变形 $\delta\varphi$ 对应变分

$$- \int_I \mathbf{p} \cdot \delta\varphi da \quad (5.44)$$

对于刚体在空气中的表面能项 $\gamma_s(A_{\text{rig}} - a_I)$, 其变分来源于当前构型中接触区域面积的

变化，记当前构型中接触线位置的变分为 $\delta \mathbf{x}_c$ ，则对应的面积变分为

$$\gamma_s \int_c \delta \mathbf{x}_c \cdot \mathbf{m}_s dl \quad (5.45)$$

上式中， \mathbf{m}_s 为接触线处沿刚体表面切向的单位方向向量，积分区域 c 表示当前构型中的接触线，由于接触区域与非接触区域无重叠，有 $\partial I = \partial O = c$ 。

将方程(5.42)，(5.40)，(5.44)及(5.45)合并，得到总自由能变分 $\delta \Pi$ 的完整表达式

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_I \delta \varphi \cdot (\nabla_{s^*} \cdot \boldsymbol{\tau}_I + p) da - \int_O \delta \varphi \cdot (\nabla_{s^*} \cdot \boldsymbol{\tau}_O) da \\ & + \int_c \delta \mathbf{x}_c \cdot \gamma_s \mathbf{m}_s dl + \int_c \delta \varphi_{I,c} \cdot \boldsymbol{\tau}_I \cdot \mathbf{m}_I dl + \int_c \delta \varphi_{O,c} \cdot \boldsymbol{\tau}_O \cdot \mathbf{m}_O dl \\ & + \int_c e_I \mathbf{m}_I \cdot (\mathbf{F}_I \cdot \Delta \mathbf{X}_c) dl + \int_c e_O \mathbf{m}_O \cdot (\mathbf{F}_O \cdot \Delta \mathbf{X}_c) dl \end{aligned} \quad (5.46)$$

上式中， $\boldsymbol{\tau}_I$ 和 $\boldsymbol{\tau}_O$ 分别为接触区域和非接触区域的薄膜总张力，定义为

$$\boldsymbol{\tau}_I(\mathbf{F}_I) = \mathbf{N}(\mathbf{F}_I) + \boldsymbol{\Upsilon}_{ms}(\mathbf{F}_I) + \boldsymbol{\Upsilon}_{mv}(\mathbf{F}_I), \quad \boldsymbol{\tau}_O(\mathbf{F}_O) = \mathbf{N}(\mathbf{F}_O) + 2\boldsymbol{\Upsilon}_{mv}(\mathbf{F}_O) \quad (5.47)$$

e_I 和 e_O 分别为变形构型中接触区域和非接触区域的薄膜总能量密度，定义为

$$e_I(\mathbf{F}_I) = w(\mathbf{F}_I) + \gamma_{ms}(\mathbf{F}_I) + \gamma_{mv}(\mathbf{F}_I), \quad e_O(\mathbf{F}_O) = w(\mathbf{F}_O) + 2\gamma_{mv}(\mathbf{F}_O) \quad (5.48)$$

上式中，薄膜弹性能密度与表面弹性能密度均由参考构型中的对应能量密度经面积变换关系获得，分别表示为 $w = W/J$ 和 $\gamma = \Gamma/J$ 。 J 为薄膜中面的面积伸长比，通过 $J = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}$ 计算。

需要注意的是，在方程(5.46)中，接触线处的位置变分 $\delta \mathbf{x}_c$ ， $\delta \varphi_{I,c}$ 及 $\delta \varphi_{O,c}$ 并不是独立的，其存在几何关系

$$\delta \mathbf{x}_c = \delta \varphi_{I,c} \mathbf{F}_I \cdot \Delta \mathbf{X}_c = \delta \varphi_{O,c} \mathbf{F}_O \cdot \Delta \mathbf{X}_c \quad (5.49)$$

如图5.3所示。

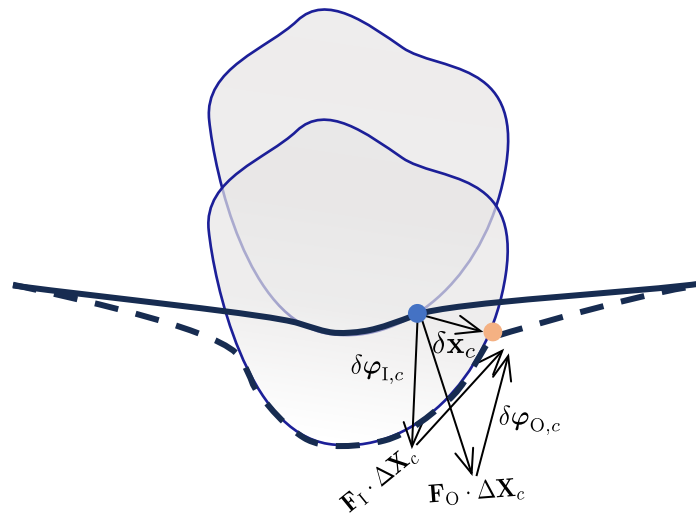


图 5.3 接触线处位置变分的几何关系：实线为任意变形状态，虚线为变分构型

将方程(5.49)代入方程(5.46)，得到

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & - \int_I \delta\varphi \cdot (\nabla_{s^*} \cdot \boldsymbol{\tau}_I + \boldsymbol{p}) \, da - \int_O \delta\varphi \cdot (\nabla_{s^*} \cdot \boldsymbol{\tau}_O) \, da \\ & + \int_C \delta\mathbf{x}_c \cdot (\gamma_s \mathbf{m}_s + \boldsymbol{\tau}_I \cdot \mathbf{m}_I + \boldsymbol{\tau}_O \cdot \mathbf{m}_O) \, dl \\ & + \int_C [(e_I \mathbf{m}_I - \boldsymbol{\tau}_I \cdot \mathbf{m}_I) \cdot \mathbf{F}_I + (e_O \mathbf{m}_O - \boldsymbol{\tau}_O \cdot \mathbf{m}_O) \cdot \mathbf{F}_O] \cdot \Delta\mathbf{X}_c \, dl \end{aligned} \quad (5.50)$$

该方程即为薄膜-刚体接触体系的总自由能变分完整形式，将其代入 $\delta\Pi = 0$ 可分别导出区域内的平衡方程以及接触线处的自然边界条件。具体地，方程第一行所包含的面积域积分对应薄膜的变形平衡方程，在接触域 I 上，薄膜变形满足平衡方程

$$\nabla_{s^*} \cdot \boldsymbol{\tau}_I + \boldsymbol{p} = 0 \quad (5.51)$$

在非接触区域 O 上，薄膜变形满足平衡方程

$$\nabla_{s^*} \cdot \boldsymbol{\tau}_O = 0 \quad (5.52)$$

上述平衡方程均可分解为沿变形曲面法向与切向的分量，分别对应薄膜的面外平衡方程（在轴对称情形下，形式同 (4.55)）与面内平衡方程（在轴对称情形下，形式同 (4.57)）。

方程(5.46)的后两行刻画了接触线处的平衡条件，其具体表达依赖于接触类型。在第5.3.2节与第5.3.3节中，将以该方程为基础，分别对薄膜-刚体接触线处的平衡关系，以及含固液界面的薄膜变形接触线平衡进行讨论。

5.3.2 薄膜-刚体接触线的平衡条件与能量判据

首先考虑薄膜与刚体之间的无摩擦黏附接触情形，此时接触线位置在当前构型与参考构型中均可发生变化，即满足 $\delta\mathbf{x}_c \neq 0$ 、 $\Delta\mathbf{X}_c \neq 0$ ，且二者相互独立（ $\delta\mathbf{x}_c \neq \Delta\mathbf{X}_c$ ）。将上述条件代入方程(5.46)，并对当前构型中接触线位置的变分 $\delta\mathbf{x}_c$ 进行分析，可得到接触线处的张力平衡条件

$$\gamma_s \mathbf{m}_s + \boldsymbol{\tau}_I \cdot \mathbf{m}_I + \boldsymbol{\tau}_O \cdot \mathbf{m}_O = 0 \quad (5.53)$$

该关系在结构上类似于液体接触体系的 Neumann 定律，但界面张力包括薄膜拉伸张力、薄膜表面张力以及刚体表面张力的共同作用。

进一步地，对参考构型中接触线位置的变分 $\Delta\mathbf{X}_c$ 进行分析，可得到接触线处的广义能量平衡关系

$$(e_I \mathbf{m}_I - \boldsymbol{\tau}_I \cdot \mathbf{m}_I) \cdot \mathbf{F}_I + (e_O \mathbf{m}_O - \boldsymbol{\tau}_O \cdot \mathbf{m}_O) \cdot \mathbf{F}_O = 0 \quad (5.54)$$

该方程来源于参考构型中接触区域与非接触区域的重新分配，刻画了接触线发生几何扰动时系统自由能的变化。组合项 $(e\mathbf{m} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m})$ 与变形梯度 \mathbf{F} 共同表征单位接触线在材料空间中推进所对应的构型驱动力。该表达由能量密度项与应力功项之差构成，在结构

上对应于 Eshelby 型能量-动量张量^[220-222] 在参考构型下的投影向量。因此, 方程(5.54)可视为块体材料中 Eshelby 构型力守恒在二维薄膜界面问题中的推广。进一步地, 在断裂问题中, 界面在材料构型中的推进对应于裂纹前沿的扩展, 该能量平衡关系随之退化为经典的 Griffith 判据, 即裂纹扩展时能量释放率与材料断裂韧度之间的平衡关系。

而在黏附或剥离问题中, 界面在参考构型中的推进对应于接触区域的扩展或收缩。此时, 上述能量驱动力可分解为薄膜弹性能的释放与界面能的变化, 分别对应于能量释放率 G 与界面黏附能 Γ_{ad} 。在平衡条件下, 该关系进一步退化为经典的黏附判据, 即

$$G = \Gamma_{\text{ad}} \quad (5.55)$$

表明接触线推进的驱动力与界面黏附能之间达到平衡。

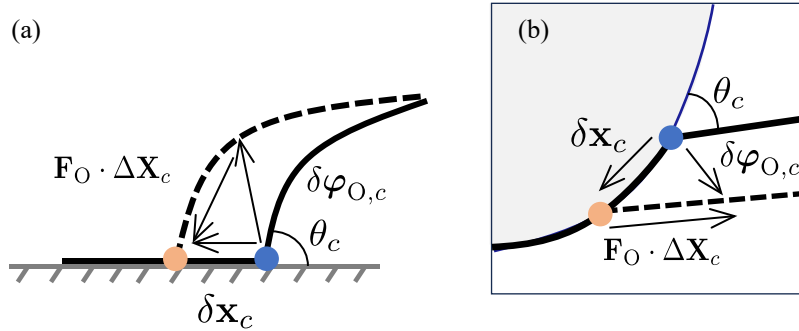


图 5.4 接触线局部剥离示意: (a) 薄膜与平面刚体的剥离; (b) 悬浮薄膜与曲面刚体的剥离

在具体的刚体-薄膜黏附接触体系中, 为了将上述 $G = \Gamma_{\text{ad}}$ 的判据落实为可计算的表达式, 需要显式表达能量释放率和界面黏附能。在黏附 (或剥离) 过程中, 沿接触线的能量释放率 G 可理解为接触线沿剥离面发生微小推进时体系总能量的变化。图5.4(a)和 (b) 分别对应于薄膜在平面与曲面的剥离状态。尽管接触界面的几何形状不同, 其能量释放率的概念及判据形式具有一致性。在剥离临界状态下, 接触区域薄膜处于张力状态 τ_{I} , 但仍与刚体保持接触, 其能量变化来源于薄膜整体变形的调整; 非接触区域的薄膜张力 τ_{O} 则在接触线推进过程中提供能量。同时, 刚体表面能 γ_{s} 沿剥离方向形成约束作用, 限制接触线的移动。因此, 可利用接触线处的力平衡关系(5.53)将接触区域张力项改写为非接触区域张力与刚体表面能的组合, 并代入(5.54)得到

$$\tau_{\text{mM}}^{\text{O}}(\mathbf{F}_{\text{mM}}^{\text{O}} - \mathbf{F}_{\text{mM}}^{\text{I}} \cdot \cos \theta_c) + \mathbf{F}_{\text{mM}}^{\text{I}}(e_{\text{I}} - \gamma_{\text{s}}) - \mathbf{F}_{\text{mM}}^{\text{O}} e_{\text{O}} = 0 \quad (5.56)$$

上式中, θ_c 为薄膜与刚体之间的接触角, 即接触线处非接触区域切向与刚体表面切向的夹角, 如图5.4所示, 其满足几何关系 $\cos \theta_c = -\mathbf{m}_{\text{I}} \cdot \mathbf{m}_{\text{O}}$ 。 τ_{mM} 和 \mathbf{F}_{mM} 分别为薄膜张力和变形梯度张量沿剥离方向的分量, 满足 $\tau_{\text{mM}} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{M}$, $\mathbf{F}_{\text{mM}} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}$ 。上式将接触区域与非接触区域的能量平衡条件转化为沿剥离方向的能量判据。

例如, 考虑纯弹性薄膜, 则界面黏附能密度满足 $\Gamma = \gamma_{\text{s}}$, 且在剥离过程中拉伸应变连续, 即 $\mathbf{F}_{\text{mM}}^{\text{O}} = \mathbf{F}_{\text{mM}}^{\text{I}}$, 对应薄膜能量密度 e 仅包含弹性能, 且在接触线两侧相等。将上

述条件代入(5.56)，得到

$$\tau_{mM}^O(1 - \cos \theta_c) = \gamma_s \quad (5.57)$$

该方程即为经典 Kendall 剥离模型的接触线能量判据。

上述推导等效于在方程(5.49)中设置 $\delta\varphi_{I,c} = 0$ ，即在接触区不对场变量施加独立变分，仅考虑接触线沿材料界面的微小推进。需要注意，该关系在无摩擦（接触线位置 $\mathbf{X}_c \neq \mathbf{x}_c$ ）和无滑移（接触线位置 $\mathbf{X}_c = \mathbf{x}_c$ ）的情况下均成立，因此形如(5.56)的能量判据在两种类型的黏附接触中均适用。

5.3.3 固液界面参与的接触线平衡

尽管第5.3.1节针对薄膜-刚体接触体系，其推导实质上源于系统自由能对几何与场变量的变分响应，因而在形式上不依赖具体界面类型或能量来源，具有普适性。在其他接触模式下，仅需调整自由能各项的表达，即可通过相同的变分过程得到相应的平衡方程与边界条件。基于此，以下对含固液界面的接触体系进行简要分析。

悬浮薄膜上的液滴润湿是典型的固液接触问题。液滴可自由变形，因此总自由能中需引入体积守恒约束，而不再满足共形接触条件。由于液体接触线既可自由形变，又伴随材料重新分布，其在当前构型与参考构型中的变分均不为零且相互独立，即 $\delta\mathbf{x}_c \neq 0$ 、 $\Delta\mathbf{X}_c \neq 0$ 且 $\delta\mathbf{x}_c \neq \Delta\mathbf{X}_c$ 。基于能量变分可得到接触线处的张力与能量平衡关系，形式分别对应式(5.53)与(5.54)。在液体体系中，接触线推进对应不同界面之间的物质重新分配，因此能量平衡条件可等价表述为界面间化学势守恒^[54-55]。

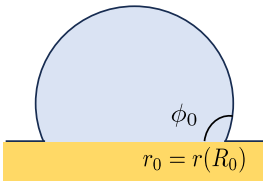
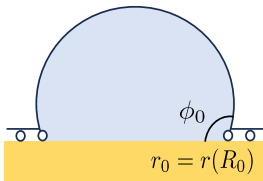
此外，上述能量变分方法也可推广至同时包含固体接触界面与固液界面的薄膜体系。例如，在考虑薄膜表面弹性的弹性润湿问题中，薄膜包覆液滴并与基底接触，其总自由能可表示为

$$\Pi = \int_{I_0} [W(\mathbf{F}_I) + \Gamma_{ml}(\mathbf{F}_I)] dA + \int_{O_0} [W(\mathbf{F}_O) + \Gamma_{ms}(\mathbf{F}_O)] dA + \gamma_s a_I + \mathbf{p}(V - V_0) \quad (5.58)$$

其中，表面能密度 Γ_{ml} 、 Γ_{ms} 和 γ_s 分别对应薄膜-液体界面、薄膜-基底界面以及液体-基底界面， a_I 为变形构型中液滴-基底界面的面积，参考构型中的区域 I_0 和 O_0 分别对应薄膜包覆液滴的接触区域，以及薄膜与基底相接触的区域。由于该体系与薄膜-刚体接触体系存在物理机制的内在一致性，因此可不进行详细的场变分和几何变分推导，而直接通过方程(5.50)给出平衡方程和接触线条件。具体地，在 I_0 区域，薄膜的变形平衡方程与(5.51)相一致，其中 \mathbf{p} 为液体压力。接触线上，液体-基底接触界面类似于刚体暴露在空气中的表面，前者限制了接触线向外扩展，后者限制了薄膜的剥离；对于其他两个固体接触界面，薄膜拉伸作用与表面弹性作用共同参与力的平衡与能量平衡。此外，薄膜-基底接触形式的变化带来了接触线处约束的多样性，其与弹性毛细作用的耦合导致了不同的接触角，如表5.1第三栏所示^[181]，本小节将表面弹性引入，对接触角产

生了进一步的修正，见表5.1第四栏。表中 $N_{r,I}$ 和 $N_{r,O}$ 表示接触线两侧径向弹性拉伸张力， $\tau_{r,I}$ 和 $\tau_{r,O}$ 为接触线两侧含固液表面张力的总张力， $\lambda_{r,I}$ 为液体接触区域径向伸长比， γ_0^{ms} 与 γ_0^{ml} 为零应变状态的初始固体表面能，对应于薄膜-基底界面和薄膜-液体界面。

表 5.1 薄膜表面弹性对润湿接触线和接触角的影响

	Adhesive	Slippery
接触示意		
变分约束	$\Delta R_0 = \delta r_0 \neq 0$	$\Delta R_0 \neq \delta r_0 \neq 0$
接触角	$\cos \phi_0 = \frac{\gamma_0^{ms} - \gamma_s + N_{r,I} \lambda_{r,I} - W(\mathbf{F}_I)}{N_{r,I} + \gamma_0^{ml}}$	$\cos \phi_0 = \frac{\gamma_0^{ms} - \gamma_s + N_{r,O}}{N_{r,I} + \gamma_0^{ml}}$
表面弹性影响	$\cos \phi_0 = \frac{\gamma_0^{ms} - \gamma_s + \tau_{r,I} \lambda_{r,I} - (W(\mathbf{F}_I) + \Gamma_{ml})}{\tau_{r,I}}$	$\cos \phi_0 = \frac{\tau_{r,O} - \gamma_s}{\tau_{r,I}}$

以上讨论了本节中提出的非线性表面弹性薄膜理论在不同接触构型下的表现形式与普适性。接下来，针对悬浮薄膜与刚性球体接触的情形，对非线性表面弹性的具体影响进行分析。

5.4 表面弹性对薄膜脱粘行为的影响

5.4.1 数值求解框架

本节基于第5.3节中薄膜-刚体的黏附接触理论，讨论薄膜表面弹性对脱粘力的影响。选取超弹性薄膜与刚性球体的轴对称、无摩擦接触作为典型模型进行研究，该黏附接触模型的研究框架已在第4.4节中给出，但由于表面弹性的引入，体系的控制方程与边界条件都有所改变。薄膜-刚性球体的接触变形过程与第4.4节的描述一致，包括初始的无接触状态，无黏附接触的下压过程，以及薄膜非线性变形与界面黏附力共同作用的脱粘过程，具体过程示意及物理标识（如薄膜半径 R_f 、预拉伸 λ_0 等）可参照图4.6。

针对轴对称接触模型，薄膜全域的变形平衡方程(5.51)和(5.52)沿法向分量的投影对应面外平衡方程

$$\frac{r'z'' - z'r''}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} \tau_r + \frac{z'}{r(r'^2 + z'^2)^{1/2}} \tau_\theta + p \mathcal{H}(R_c - R) = 0 \quad (5.59)$$

沿切向分量的投影对应面内平衡方程

$$\frac{d\tau_r}{dR} + \frac{r'(\tau_r - \tau_\theta)}{r} = 0 \quad (5.60)$$

以上平衡方程中, τ_r 和 τ_θ 是薄膜张力 $\boldsymbol{\tau}$ 的径向与环向分量, 即 $\boldsymbol{\tau} = \tau_r \mathbf{m}\mathbf{M} + \tau_\theta \mathbf{t}\mathbf{T}$ 。

根据方程(5.47), 薄膜张力 $\boldsymbol{\tau}$ 由弹性张力 \mathbf{N} 和表面张力 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 共同组成, 其中弹性张力仍采用不可压缩的 neo-Hookean 本构关系, 因此, 径向和环向弹性张力的表达形式同方程(4.71)。针对表面张力, 本节也采用 neo-Hookean 本构关系, 在变形构型中, 表面弹性密度为

$$\gamma = \frac{\mu^s}{2J} \left(I_1 - 3 + \frac{1}{J^2} \right) + \gamma_0 \quad (5.61)$$

上式中, $I_1 = \lambda_r^2 + \lambda_\theta^2$ 为薄膜变形的第一不变量, $J = \lambda_r \lambda_\theta$ 为轴对称薄膜的表面积变化率, γ_0 为零应变状态下的表面能密度, μ^s 为表面剪切模量。参考构型中的表面能密度通过 $\Gamma = \gamma J$ 计算, 由此得到表面柯西张力

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \Upsilon_r \mathbf{m}\mathbf{M} + \Upsilon_\theta \mathbf{t}\mathbf{T} = \left(\gamma_0 + \mu^s \frac{\lambda_r^4 \lambda_\theta^2 - 1}{\lambda_r^3 \lambda_\theta^3} \right) \mathbf{m}\mathbf{M} + \left(\gamma_0 + \mu^s \frac{\lambda_r^2 \lambda_\theta^4 - 1}{\lambda_r^3 \lambda_\theta^3} \right) \mathbf{t}\mathbf{T} \quad (5.62)$$

该表面张力不仅以类似常数表面张力的形式出现在面外平衡方程中, 还由于表面剪切模量的存在, 与面内变形产生耦合, 从而进入面内平衡方程。

在求解中, 仍将平衡方程转化为一阶常微分方程组(4.64)进行求解, 其包括待解参量 $\{\lambda_\theta, z, \phi, \lambda_r\}$ 。其中, λ_θ 和 z 的一阶微分来自于几何关系, 表面弹性不会对其造成影响, 而 ϕ 和 λ_r 分别来自面外和面内平衡方程, 考虑表面弹性后, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dR} &= \frac{p\mathcal{H}(R_c - R)R\lambda_\theta\lambda_r - \lambda_r\tau_\theta\sin\phi}{R\lambda_\theta\tau_r} \\ \frac{d\lambda_r}{dR} &= \frac{\lambda_r(\tau_\theta - \tau_r)\cos\phi - \lambda_\theta(\partial\tau_r/\partial\lambda_\theta)(\lambda_r\cos\phi - \lambda_\theta)}{R\lambda_\theta(\partial\tau_r/\partial\lambda_r)} \end{aligned} \quad (5.63)$$

本节直接使用接触线位置变分所推出的张力平衡条件(5.53)及能量平衡条件(5.54)作为接触线条件进行求解, 其等效于能量判据与变形(非)连续性条件(见第四章)或张力平衡条件^[102]的组合。针对刚性球体与薄膜的接触模型, 在接触线处, 方向向量满足几何关系 $\mathbf{m}_I = -\mathbf{m}_s$, $\mathbf{m}_I \cdot \mathbf{m}_O = -\cos\theta_c$, 由此可将(5.53)改写为标量方程

$$\begin{aligned} &(\mu_{t0} + \mu_{mv} + \mu_{ms}) \left(\frac{\lambda_{r,I}}{\lambda_\theta} - \frac{1}{\lambda_{r,I}^3 \lambda_\theta^3} \right) + \gamma_0^{mv} + \gamma_0^{ms} - \gamma_s \\ &- \left[(\mu_{t0} + 2\mu_{mv}) \left(\frac{\lambda_{r,O}}{\lambda_\theta} - \frac{1}{\lambda_{r,O}^3 \lambda_\theta^3} \right) + 2\gamma_0^{mv} \right] \cos\theta = 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

轴对称框架下, 接触线处的变形梯度张量可表示为

$$\mathbf{F}_I = \lambda_{r,I} \mathbf{m}_I \mathbf{M}_I + \lambda_\theta \mathbf{t}\mathbf{T}, \quad \mathbf{F}_O = -\lambda_{r,O} \mathbf{m}_O \mathbf{M}_I + \lambda_\theta \mathbf{t}\mathbf{T} \quad (5.65)$$

上式中, $\lambda_{r,I}$ 和 $\lambda_{r,O}$ 分别为接触线内侧和外侧的径向拉伸比。上式应用了接触线处的

环向变形连续性条件 $\lambda_{\theta,I} = \lambda_{\theta,O}$ 及方向向量的几何关系^[61] $\mathbf{t}_I = \mathbf{t}_O = \mathbf{t}$, $\mathbf{T}_I = \mathbf{T}_O = \mathbf{T}$ 及 $\mathbf{M}_I = -\mathbf{M}_O$ 。将(5.65)代入(5.54)得到标量方程

$$\lambda_{r,I}(e_{r,I} - \tau_{r,I}) - \lambda_{r,O}(e_O - \tau_{r,O}) = 0 \quad (5.66)$$

上式中, $\tau_{r,I}$ 与 $\tau_{r,O}$ 分别是接触线内侧和外侧的径向薄膜张力。变形构型中, 薄膜弹性能密度可通过方程(4.70)经过 $w = (W_{bt_0})/J$ 的转换得到:

$$w = \frac{\mu t_0}{2} \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_\theta} + \frac{\lambda_\theta}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_r^3 \lambda_\theta^3} - \frac{3}{\lambda_r \lambda_\theta} \right) \quad (5.67)$$

将方程(5.67), (5.61), (5.62)及(4.71)代入(5.66), 得到

$$\begin{aligned} \mu t_0 \left[\lambda_{r,O}^2 - \lambda_{r,I}^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2} \left(\frac{1}{\lambda_{r,I}^2} - \frac{1}{\lambda_{r,O}^2} \right) \right] - \left[(\mu_{mv} + \mu_{ms}) \left(\lambda_{r,I}^2 - \frac{3}{\lambda_{r,I}^2 \lambda_\theta^2} - \lambda_\theta^2 + 3 \right) \right. \\ \left. - 2\mu_{mv} \left((\lambda_{r,O})^2 - \frac{3}{\lambda_{r,O}^2 \lambda_\theta^2} - \lambda_\theta^2 + 3 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

上式中, μ 为薄膜弹性剪切模量, μ_{mv} 与 μ_{ms} 分别表示薄膜-空气界面与薄膜-刚体界面的表面剪切模量。对于纯弹性薄膜, $\mu_{mv} = \mu_{ms} = 0$, 该方程的唯一解为接触线两侧的径向拉伸连续, 即 $\lambda_{r,I} = \lambda_{r,O}$ 。当 $\mu_{mv} = \mu_{ms} \neq 0$ 时, 该连续性条件依然保持成立。

方程(5.64)、(5.68)结合自然边界条件(4.65)及接触线变形条件(4.66)中的高度项, 构成了求解所需要的边界条件。通过薄膜等效剪切刚度 μt_0 和固定端半径 R_f 对体系进行无量纲化, 对于张力参量, 有

$$\bar{\mu}_{mv} = \frac{\mu_{mv}}{\mu t_0}, \quad \bar{\mu}_{ms} = \frac{\mu_{ms}}{\mu t_0}, \quad \bar{\gamma}_0^{mv} = \frac{\gamma_0^{mv}}{\mu t_0}, \quad \bar{\gamma}_0^{ms} = \frac{\gamma_0^{ms}}{\mu t_0}, \quad \bar{\gamma}_s = \frac{\gamma_s}{\mu t_0} \quad (5.69)$$

通过打靶法求解得到薄膜变形与应力场后, 薄膜与刚性球体之间的脱粘力仍通过接触线处竖直方向力的平衡得到:

$$F = 2\pi r_c \tau_r^+ \sin \phi (R_c^+) \quad (5.70)$$

对于黏附问题, 需要重点讨论的依旧是薄膜-刚性球体的平衡状态及脱粘力, 为此, 这里给出轴对称框架下方程(5.56)所对应的能量判据:

$$G = \tau_{r,O} (1 - \cos \theta_c) + \tau_{r,O}^{\text{strain}} \left(\frac{\lambda_{r,O}}{\lambda_{r,I}} - 1 \right) + e_I^{\text{strain}} - e_O^{\text{strain}} \frac{\lambda_{r,O}}{\lambda_{r,I}} = \Gamma_{\text{ad}} \quad (5.71)$$

上式中, 界面黏附能沿用第四章中的定义, 即 $\Gamma_{\text{ad}} = \gamma_s + \gamma_0^{mv} - \gamma_0^{ms}$ 。在这种定义下, 所有与变形相关的量均包含在能量释放率的表达式中, 上标 **strain** 表示该物理量的可变(应变依赖)部分, 与常数项(γ_0^{mv} 等)相区分。

接下来考虑表面弹性效应对薄膜-刚性球体黏附接触体系平衡状态及脱粘力的影响。由方程(5.61)可知, 体系的关键参数为表面剪切模量 μ^s 与零应变状态下的常数表面能密度 γ_0 。其中, γ_0 的作用已在第4.4节中详细讨论, 数值计算结果表明其效果类似于预

张力，不会改变宏观脱粘力的大小。因此，本节主要讨论对称表面弹性效应 $\mu_{ms} = \mu_{mv}$ 及非对称表面弹性效应 $\mu_{ms} \neq \mu_{mv}$ ，其中“对称”是指薄膜在不同界面上的表面弹性响应相同，即拉伸或剪切引起的界面能变化一致。

5.4.2 预拉伸条件下的表面弹性效应

研究表明，在薄膜发生较大变形时，系统物理量可在一定条件下得到简化^[102]。基于这一认识，下面在预拉伸条件下对薄膜的表面弹性效应进行进一步讨论。首先考虑对称表面弹性效应的影响，如图5.5所示。这种情况下，表面剪切模量的作用机制与常数表面张力（见图5.5(a)）一致，正的表面模量通过提高薄膜的等效刚度抑制其变形，相比较纯弹性的情况（图中虚线），薄膜脱粘点的变形高度被限制，但脱粘力的大小并未发生改变。

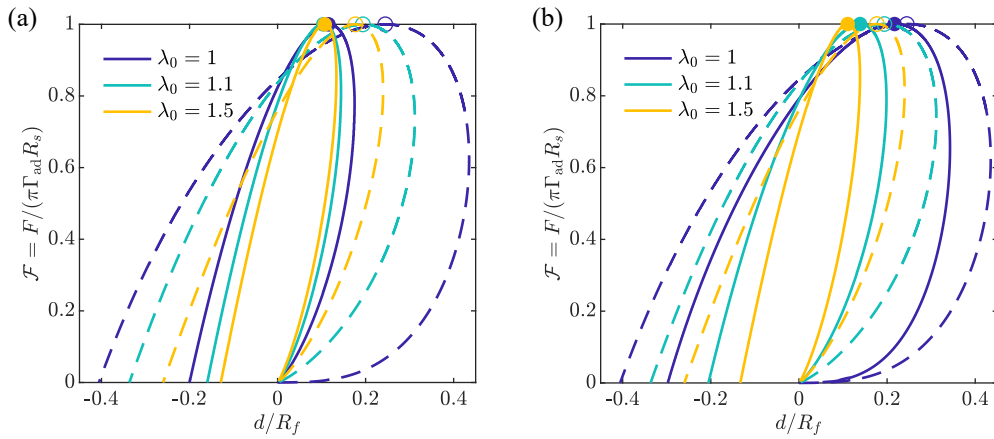


图 5.5 不同预拉伸下，对称表面弹性对脱粘力-位移曲线的影响：(a) 常数表面张力 $\bar{\gamma}_0^{mv} = \bar{\gamma}_0^{ms} = 0.5$ 的影响；(b) 对称表面剪切模量 $\bar{\mu}_{mv} = \bar{\mu}_{ms} = 0.5$ 的影响。设置 $R_s = R_f/2$, $\bar{\Gamma}_{ad} = 0.5$ ，虚线对应常数表面张力及表面弹性模量均为 0

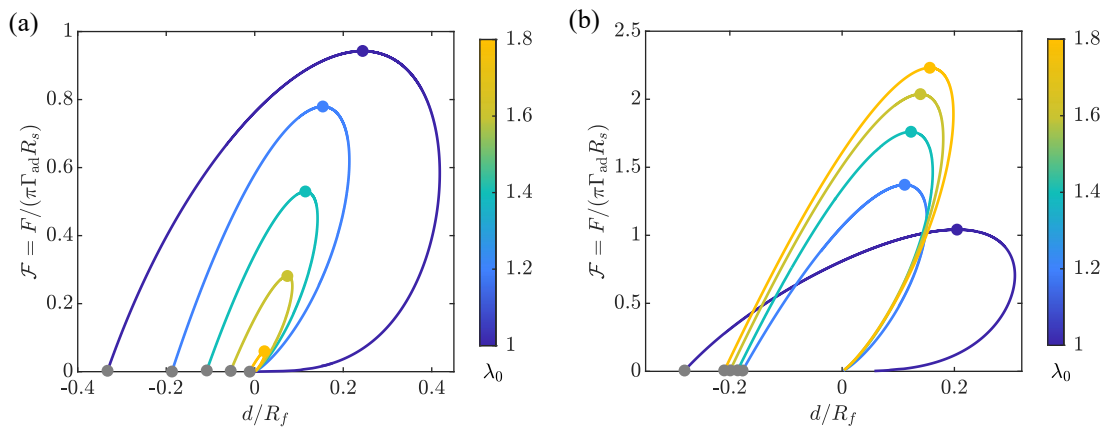


图 5.6 非对称表面弹性条件下，预拉伸对脱粘阶段力-位移曲线的影响：(a) $\bar{\mu}_{ms} = 1$, $\bar{\mu}_{mv} = 0$ ；(b) $\bar{\mu}_{ms} = 0$, $\bar{\mu}_{mv} = 1$ 。图中彩色实心点和灰色实心点分别表示脱粘点和稳定零外力点

而当接触线两侧存在非对称表面弹性效应时，对应于不同的预拉伸，通过 $\pi\Gamma_{ad}R_s$ 所

定义的无量纲脱粘力会发生显著变化。具体而言，当接触区域的表面弹性较大 ($\bar{\mu}_{ms} = 1$, $\bar{\mu}_{mv} = 0$) 时，预拉伸的增大会使无量纲脱粘力减小，当预拉伸为 $\lambda_0 = 1.8$ 时，无量纲脱粘力可降至 0.1 左右，如图5.6(a) 所示；反之，当接触区域的表面弹性较小 ($\bar{\mu}_{ms} = 0$, $\bar{\mu}_{mv} = 1$) 时，预拉伸的增大则会使脱粘力增大，当预拉伸为 $\lambda_0 = 1.8$ 时，无量纲脱粘力可达到 2.3 左右，如图5.6(b) 所示。值得注意的是，预拉伸增大时，脱粘点对应的薄膜中心拉伸位移并不总是单调减小的，这是因为预拉伸作用不仅改变了薄膜刚度及变形顺应性，也改变了薄膜的几何尺度。

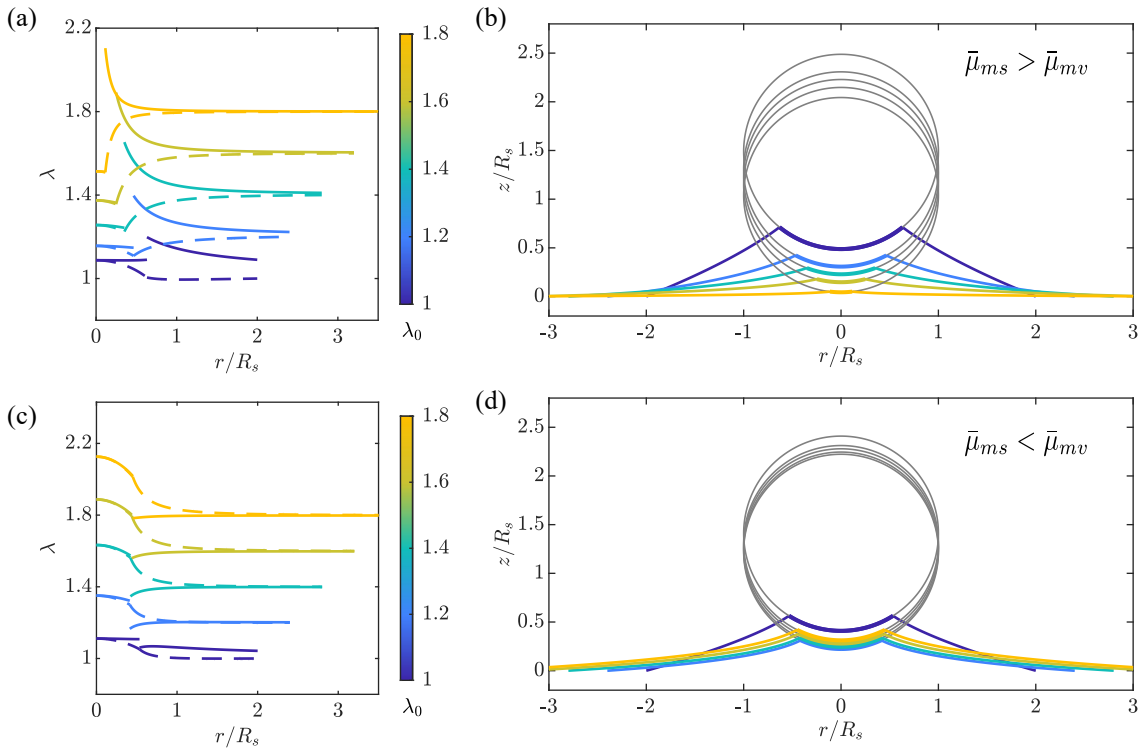


图 5.7 非对称表面弹性条件下，预拉伸对脱粘点变形的影响：(a) 非对称表面剪切模量 $\bar{\mu}_{ms} = 1$, $\bar{\mu}_{mv} = 0$ 时，预拉伸对伸长比的影响，实线和虚线分别对应径向伸长比与环向伸长比；(b) 对应于 (a) 的变形轮廓；(c) $\bar{\mu}_{ms} = 0$, $\bar{\mu}_{mv} = 1$ 时，预拉伸对伸长比的影响，实线和虚线分别对应径向伸长比与环向伸长比；(d) 对应于 (c) 的变形轮廓

图5.7对两种情况下脱粘点的平衡构型进行了分析。预拉伸决定了薄膜整体的变形幅度，尤其当预拉伸较大 $\lambda_0 \geq 1.2$ 时，不论对于接触区表面剪切模量更大（图5.7(a)）或非接触区域剪切模量更大（图5.7(c)）的情况，薄膜在远离接触线的区域近乎等轴拉伸，径向拉伸比仅在接触线附近发生较为明显的跳跃。该接触线应变集中现象由非对称的表面剪切模量引发。当接触区域表面剪切模量更大时，该区域薄膜变形受到明显抑制，表现出类似“刚性夹持”的特征，迫使非接触区域发生更大的变形，积累弹性能以满足能量释放率条件，如图5.7(a) 所示。这种“刚性夹持”机制也体现在整体的变形轮廓中。如图5.7(b) 所示，预拉伸增大使脱粘状态的接触面积和拉伸高度均迅速减小。而非接触区域表面剪切模量更大时，薄膜变形的径向分布更加均匀，接触区域能够发生

更为充分的变形，如图5.7(c)所示。在该情形下，薄膜的平衡变形轮廓表现出明显的预拉伸-表面弹性耦合特征，如图5.7(d)所示。具体而言，当预拉伸 $\lambda_0 \leq 1.2$ 时，薄膜整体变形随预拉伸的增大而减小；而当预拉伸进一步增大时，薄膜变形反而呈现增强趋势，且预拉伸越大，该效应越为显著。这种非单调变化来源于非接触区域近刚性约束下，预拉伸对薄膜整体变形顺应性及几何尺度的调节。

图5.8对应于图5.6中零外力点的薄膜变形伸长比和变形轮廓，由图可知，二者随预拉伸的变化规律与脱粘点相一致。

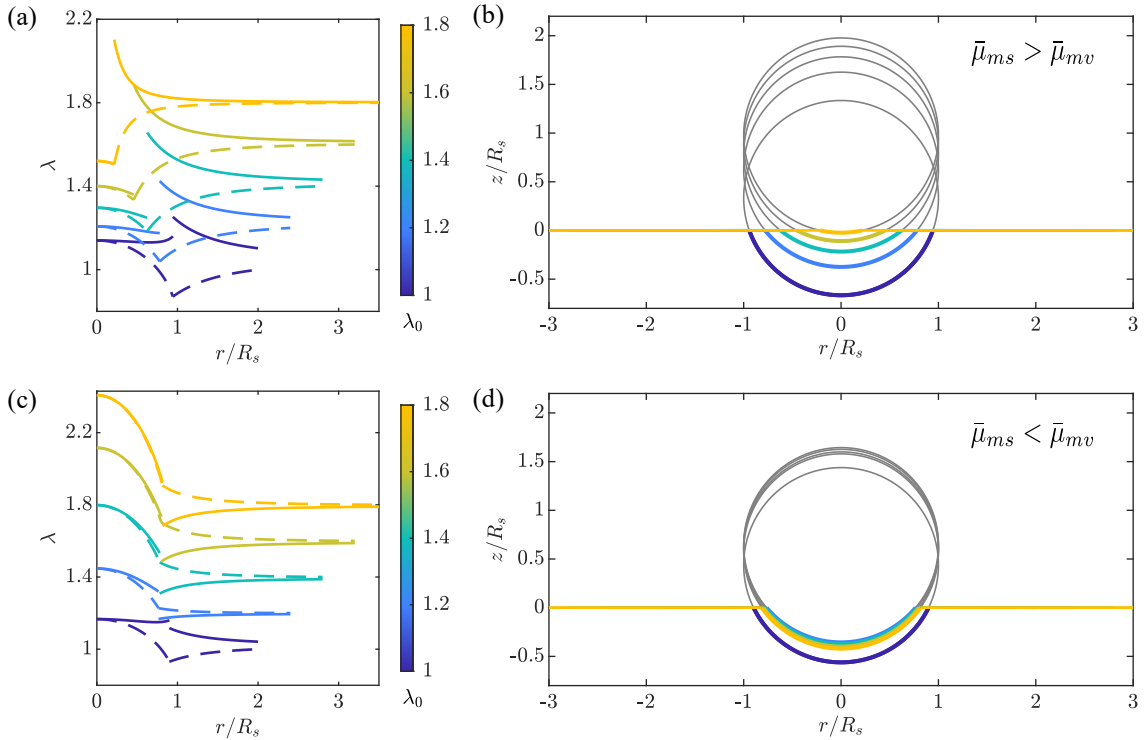


图 5.8 非对称表面弹性条件下,预拉伸对零外力点变形的影响:(a) 非对称表面剪切模量 $\bar{\mu}_{ms} = 1$, $\bar{\mu}_{mv} = 0$ 时, 预拉伸对伸长比的影响, 实线和虚线分别对应径向伸长比与环向伸长比; (b) 对应于 (a) 的变形轮廓; (c) $\bar{\mu}_{ms} = 0$, $\bar{\mu}_{mv} = 1$ 时, 预拉伸对伸长比的影响, 实线和虚线分别对应径向伸长比与环向伸长比; (d) 对应于 (c) 的变形轮廓

由上述分析可知，薄膜的表面弹性不仅会像体弹性模量一样影响其硬度，还会改变接触线处的变形连续性条件，从而显著调控宏观脱粘响应。在理想界面假设下，界面附近的局部非均匀应变被归为能量释放率的应变修正项，如方程(5.71)所描述。然而，为了更清晰地揭示脱粘物理机制，并便于实验上对表面弹性参数进行表征，可将上述应变修正项移至界面能中考虑，从而使得能量释放率回归到纯粹“界面驱动力”的概念，即

$$G = \tau_{r,0}(1 - \cos \theta_c) = \Gamma_{ad} - \tau_{r,0}^{\text{strain}} \left(\frac{\lambda_{r,0}}{\lambda_{r,I}} - 1 \right) - e_1^{\text{strain}} + e_0^{\text{strain}} \frac{\lambda_{r,0}}{\lambda_{r,I}} \quad (5.72)$$

此时，方程右侧可理解为有效界面能 $\Gamma_{ad} + f(\lambda_{r,I}, \lambda_{r,0}, \lambda_{\theta})$ 。在预拉伸较大的情况下，体

系整体变形由预拉伸主导，界面弹性对变形场的影响主要体现在局部修正上，因此可近似认为 $\lambda_{r,0} \sim \lambda_{r,1} \sim \lambda_\theta \sim \lambda_0$ 。将方程(5.72)所示的有效界面能代入经典薄膜-刚性球体脱粘力表达式，并结合预拉伸主导下的薄膜伸长比关系，可得到考虑非对称表面弹性效应的无量纲脱粘力理论预测公式：

$$\mathcal{F} = 1 + \frac{f(\lambda_0)}{\bar{\Gamma}_{\text{ad}}} = 1 + \frac{\bar{\mu}_{mv} - \bar{\mu}_{ms}}{2} \left(2 + \frac{1}{\lambda_0^6} - \frac{3}{\lambda_0^2} \right) \quad (5.73)$$

该方程中，变形幅度完全由预拉伸比 λ_0 决定；而非对称表面剪切模量通过差值 $\bar{\mu}_{mv} - \bar{\mu}_{ms}$ 线性进入表达式，直接控制能量修正项的幅值与符号。通过方程(5.73)可得到不同预拉伸及表面剪切模量对应的脱粘力，与数值计算结果对比，如图5.9所示。理论预测与数值结果吻合良好，表明方程(5.73)能够有效捕捉表面弹性对脱粘行为的主要影响机制。这一结果为通过压痕实验反演软凝胶等材料的表面弹性参数提供了潜在的理论基础。

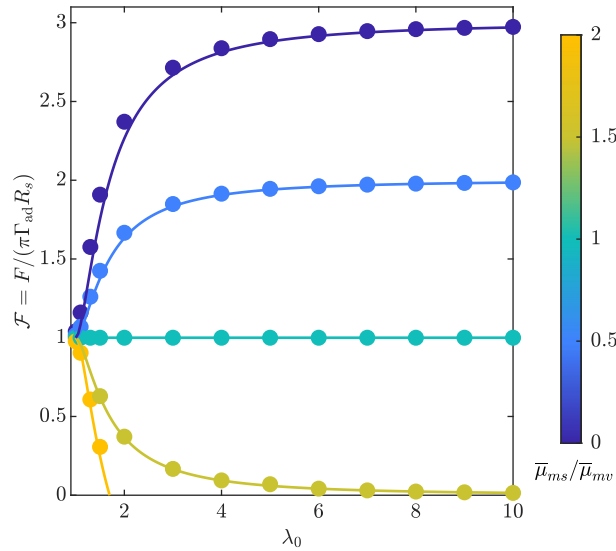


图 5.9 不同预拉伸与表面剪切模量下的薄膜脱粘力。实线和散点分别表示理论预测公式与数值计算的结果

5.5 本章小结

本章在第四章的基础上，对薄膜界面接触问题进行了系统拓展。首先，建立了包含可动边界的固体接触变分理论框架，将体系的一阶变分分解为由材料变形引起的场变分与由积分域变化引起的几何变分。其中，场变分在大变形条件下可转化为梯度形式，并进一步表示为域内薄膜张力的散度项及接触线处的张力贡献；几何变分则对应于接触线处的边界能量项。基于该统一框架，可针对不同接触问题选取相应的能量函数与自然边界条件，从而系统地导出域内平衡方程及接触线处的平衡条件。

在此基础上，将该变分理论应用于任意形状薄膜与刚体之间的黏附接触问题，结

合接触线位置变分的几何约束对变分结果进行处理，得到薄膜的变形控制方程以及接触线处的界面张力与能量平衡条件。进一步结合能量释放率的物理意义，将接触线条件转化为薄膜-刚体界面剥离的能量判据。由于上述平衡条件来源于总能量对构型扰动的一阶变分为零，该理论框架亦可自然推广至含有固液界面的接触问题。

针对轴对称悬浮薄膜与刚性球体的接触体系，考虑 neo-Hookean 薄膜弹性及表面弹性，采用打靶法对控制方程进行了数值求解。结果表明，非对称表面弹性会导致接触线处径向伸长比的非连续条件，从而使脱粘力偏离经典结果 $\pi\Gamma_{ad}R_s$ 。在预拉伸主导的大变形条件下，对上述偏离机制进行了定量分析，通过引入有效界面能的概念，建立了脱粘力的理论预测公式。该表达式与数值结果吻合良好，能够较好地预测不同预拉伸与表面弹性参数下的脱粘行为。本章的研究为基于压痕实验反演软凝胶表面弹性参数提供了新的理论依据。

第六章 结论与展望

6.1 论文工作总结

薄膜材料在微纳制造、柔性机器人及脑机接口等领域广泛应用。伴随其尺寸、形状与功能的精细化调控，薄膜力学研究具有重要的基础性意义，为预测性能、指导设计以及拓展应用提供了理论基础。结合能量变分和非线性力学分析，本文系统研究了薄膜润湿、压痕、黏附及表面弹性效应等经典表界面问题，揭示了薄膜在弹性与表界面耦合作用下的非线性力学响应机制，主要成果总结如下：

(1) 弹性薄膜的非线性润湿理论。本研究在 Föppl-von Kármán 理论框架下建立了薄膜非线性润湿模型，结合动边界条件与能量最小化原理推导了体系的平衡条件，实现了空间变化下薄膜张力场与变形场的求解。在此基础上，引入可弯曲性无量纲数 β 和可变形性无量纲数 λ 构建润湿行为演化机制，系统阐释了薄膜的弯曲、拉伸等内禀效应与液滴毛细、重力等外界效应共同作用下的非线性润湿行为。该模型可为柔性电子器件、微流控界面设计或自清洁表面优化提供理论指导。

(2) 薄膜弹性毛细效应的实验与理论。本研究基于对薄膜面外变形中弹性与毛细作用耦合机制的理解，设计了薄膜与不同介质接触的压痕实验，将薄膜弹性毛细效应转化为可量化的力学响应，从而实现了对固液界面作用的有效表征。建立了考虑表面张力的压痕理论模型，对实验结果进行解释，并根据实验测得的界面能量差异表征了石墨烯的亲水性。该工作可为界面张力驱动的执行器、传感器设计等提供参考。

(3) 非线性弹性薄膜黏附理论。经典黏附理论难以直接描述具有显著非线性变形的薄膜体系。针对这一问题，本研究系统分析了不同本构关系与变形特征下的薄膜非线性黏附行为。对于肥皂薄膜，给出了最小曲面方程的解析解答；对于无矩薄膜，强调了 Föppl-von Kármán 理论框架下一致性几何非线性描述的重要性；对于超弹性薄膜，讨论了薄膜尺寸、预拉伸、黏附能及表面张力等作用对其黏附行为的影响。结果表明，薄膜与刚性球体之间存在大小为 $\pi\Gamma_{ad}R_s$ 的稳定脱粘力，且仅由界面黏附能与球体尺寸决定。该工作提出的薄膜界面力学理论摆脱了对材料本构关系、薄膜厚度、残余应力等复杂因素的依赖，为电子器件、生物医学等领域中薄膜材料界面性质的准确测量提供了理论方案。

(4) 非线性弹性薄膜表界面问题的变分理论。本研究建立了非线性弹性薄膜表界面问题的一致性变分框架，将表面弹性纳入分析。以任意形状薄膜与刚体的接触情形为例进行了详细变分推导，得到了薄膜变形平衡方程与接触线平衡条件，其中，能量平衡条件可统一解释为 Eshelby 构型力守恒与 Griffith 判据在二维薄膜界面问题中的推广。该

变分理论框架可自然延拓至含固液界面的情形。基于具体的轴对称模型，分析了表面弹性效应对薄膜脱粘行为的影响，提出了适用于预拉伸大变形的非稳定脱粘力理论预测公式。结合该公式与可调控的预拉伸条件，可为软凝胶等柔性材料表面弹性效应的实验表征提供一种理论框架。

6.2 未来研究展望

本文针对弹性薄膜的非线性力学以及表界面效应进行了一系列工作，在本文内容的基础上，后续工作可进一步拓展至动力学接触问题、更复杂的界面类型、更具物理真实性的研究方法，以及更贴近实际应用的方向，具体包括但不限于以下几个方面：

(1) 动力学润湿与软润滑问题。未来可以在静态润湿的基础上，将液体黏性耗散与接触线摩擦等动态因素纳入模型，从而更真实地描述接触线运动和接触角变化。同时，当薄膜与其他物体接触且界面存在流体介质时，界面流体的运动会与材料的弹性变形相互作用，形成软润滑问题。未来可通过耦合流体润滑和薄膜弹性方程，分析流体压力、薄膜形变和界面效应的相互影响，以帮助理解润滑失效、局部不稳定以及接触线动力学之间的关系。

(2) 多物理场耦合界面行为。未来的研究可以在现有表界面力学框架基础上，引入热场、电场以及化学作用等多物理因素，探讨它们对界面行为的影响。具体可考虑界面能对温度、电势和化学势的依赖关系，建立包含热弹性、电润湿和化学相互作用的能量表达式，从而描述多物理场对界面能及黏附行为的调控机制。例如，可通过引入温度梯度相关项，刻画热致界面能变化及由此产生的表面张力流动（Marangoni）效应。

(3) 考虑范德华相互作用的黏附接触问题。本文所研究的液滴润湿模型、悬浮薄膜与刚体黏附接触模型均可引入范德华相互作用，从微观尺度刻画界面能对接触形貌与失稳条件的影响。进一步考虑多层及异质薄膜体系的接触问题，结合层间范德华作用与模量失配效应，有望系统建立分层、起皱及局部脱粘等界面失稳模式的标度关系，并揭示其内在调控机制。

(4) 机器学习辅助的多体接触问题。在现有单体介质与薄膜接触研究的基础上，进一步考虑更为复杂的多体接触行为，如多液滴协同润湿及多刚体黏附接触。针对多体系统中存在的强非线性耦合与复杂界面演化，可引入机器学习方法，构建数据驱动或物理约束的预测模型，实现多体接触构型下力学响应的高效预测，并辅助揭示其内在机理。

(5) 面向实际应用的薄膜表界面力学研究。上述几方面展望针对于具体的力学问题，此外，本文侧重表界面效应的力学机理研究，相关机理潜在应用于柔性电子器件、微流控、生物医学等领域，未来研究可将理论与实际应用相结合，实现薄膜材料的功能化演示。实际应用场景中往往包含非轴对称几何、材料各向异性、大变形、复杂边界以

及多物理场耦合等问题。为解决这些问题，数值方面，可采用三维有限元或谱方法，将动边界变分框架嵌入数值求解器中，并利用自适应网格技术处理局部大变形区域。理论方面，可采用渐近或扰动分析，在边界或材料轻微非对称情况下，可基于轴对称解进行扰动展开，为复杂问题提供初步理论指导；或针对具体边界条件，引入局部坐标系或多尺度模型，将局部非对称效应映射到全局模型中，实现力学平衡与边界条件匹配。实验方面，可通过微纳加工或柔性制造技术制备具有特定边界和几何形状的薄膜样品，结合光学显微、高速成像或数字图像相关技术考察薄膜材料的形态演化和应力分布。

参考文献

- [1] Smith A D, Niklaus F, Paussa A, et al. Piezoresistive properties of suspended graphene membranes under uniaxial and biaxial strain in nanoelectromechanical pressure sensors[J]. *ACS Nano*, 2016, 10: 9879-9886.
- [2] Davidovikj D, Scheepers P H, van der Zant H S J, et al. Static capacitive pressure sensing using a single graphene drum[J]. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 2017, 9: 43205-43210.
- [3] Fu M, Shi Z, Bošnjak B, et al. Silicon-based MEMS/NEMS empowered by graphene: a scheme for large tunability and functionality[J]. *Microsystems & Nanoengineering*, 2025, 11: 116.
- [4] Ahn M S, Jeon J, Jang K W, et al. Large-area and ultrathin MEMS mirror using silicon micro rim[J]. *Micromachines*, 2021, 12: 754.
- [5] Sim K, Rao Z, Kim H J, et al. Fully rubbery integrated electronics from high effective mobility intrinsically stretchable semiconductors[J]. *Science Advances*, 2026, 5: eaav5749.
- [6] Long G, Jin W, Xia F, et al. Carbon nanotube-based flexible high-speed circuits with sub-nanosecond stage delays[J]. *Nature Communications*, 2022, 13: 6734.
- [7] Kim D H, Ahn J H, Choi W M, et al. Stretchable and foldable silicon integrated circuits[J]. *Science*, 2008, 320: 507-511.
- [8] Rogers J A, Someya T, Huang Y. Materials and mechanics for stretchable electronics[J]. *Science*, 2010, 327: 1603-1607.
- [9] Kondo M, Melzer M, Karnaushenko D, et al. Imperceptible magnetic sensor matrix system integrated with organic driver and amplifier circuits[J]. *Science Advances*, 2026, 6: eaay6094.
- [10] Schaffner M, Faber J A, Pianegonda L, et al. 3D printing of robotic soft actuators with programmable bioinspired architectures[J]. *Nature Communications*, 2018, 9: 878.
- [11] Manfredi L, Capoccia E, Ciuti G, et al. A soft pneumatic inchworm double balloon (SPID) for colonoscopy[J]. *Scientific Reports*, 2019, 9: 11109.
- [12] Chen Y, Zhao H, Mao J, et al. Controlled flight of a microrobot powered by soft artificial muscles[J]. *Nature*, 2019, 575: 324-329.
- [13] Umrao S, Tabassian R, Kim J, et al. MXene artificial muscles based on ionically cross-linked $Ti_3C_2T_x$ electrode for kinetic soft robotics[J]. *Science Robotics*, 2019, 4: eaaw7797.
- [14] Sun P, Li C, Yang C, et al. A biodegradable and flexible neural interface for transdermal optoelectronic modulation and regeneration of peripheral nerves[J]. *Nature Communications*, 2024, 15: 4721.
- [15] Luan L, Wei X, Zhao Z, et al. Ultraflexible nanoelectronic probes form reliable, glial scar-free neural integration[J]. *Science Advances*, 2026, 3: e1601966.
- [16] Li A, Zhou W, Li H, et al. Drop-printing with dynamic stress release for conformal wrap of bioelectronic interfaces[J]. *Science*, 2025, 389: 1127-1132.
- [17] Shi Z, Zheng F, Zhou Z, et al. Silk-enabled conformal multifunctional bioelectronics for investigation of spatiotemporal epileptiform activities and multimodal neural encoding/decoding[J]. *Advanced*

- Science, 2019, 6: 1801617.
- [18] Lee W Y, Besmann T M, Stott M W. Preparation of MoS₂ thin films by chemical vapor deposition [J]. *Journal of Materials Research*, 1994, 9: 1474-1483.
- [19] Shi G, Jin S, Xue G, et al. A conducting polymer film stronger than aluminum[J]. *Science*, 1995, 267: 994-996.
- [20] Ko H C, Stoykovich M P, Song J, et al. A hemispherical electronic eye camera based on compressible silicon optoelectronics[J]. *Nature*, 2008, 454: 748-753.
- [21] Duan X, Niu C, Sahi V, et al. High-performance thin-film transistors using semiconductor nanowires and nanoribbons[J]. *Nature*, 2003, 425: 274-278.
- [22] Huang R. Show of adhesive strength[J]. *Nature Nanotechnology*, 2011, 6: 537-538.
- [23] Kaltenbrunner M, White M S, Głowacki E D, et al. Ultrathin and lightweight organic solar cells with high flexibility[J]. *Nature Communications*, 2012, 3: 770.
- [24] Park J M, Cao Y, Xia L Q, et al. Robust superconductivity in magic-angle multilayer graphene family [J]. *Nature Materials*, 2022, 21: 877-883.
- [25] Ritt C L, Quien M, Wei Z, et al. A molecularly impermeable polymer from two-dimensional polyaramids[J]. *Nature*, 2025, 647: 383-389.
- [26] 黄克智, 夏之熙, 薛明德, 等. 板壳理论[M]. 北京: 清华大学出版社 1987.
- [27] Föppl A. Vorlesungen über technische mechanik[M]. Leipzig: B.G. Teubner, 1900.
- [28] von Kármán T. Festigkeitsprobleme im maschinenbau[M]//Mechanik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1907: 311-385.
- [29] 郭仲衡. 张量 (理论和应用) [M]. 北京: 科学出版社 1988.
- [30] 黄筑平. 连续介质力学基础 (第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社 2012.
- [31] Grandgeorge P, Krins N, Hourlier-fargette A, et al. Capillarity-induced folds fuel extreme shape changes in thin wicked membranes[J]. *Science*, 2018, 360: 296-299.
- [32] Venkata V G, Orth T R, Pan W, et al. Electro-elastic wetting: a method to migrate and deform droplets [J]. *Advanced Functional Materials*, 2023, 33: 2301072.
- [33] Gibbs J W. The collected works of J. Willard Gibbs[M]. New York: Longmans, 1928.
- [34] Shuttleworth R. The surface tension of solids[J]. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 1950, 63: 444.
- [35] Vella D, Adda-bedia M, Cerda E. Capillary wrinkling of elastic membranes[J]. *Soft Matter*, 2010, 6: 5778-5782.
- [36] Hui C Y, Jagota A. Surface tension, surface energy, and chemical potential due to their difference[J]. *Langmuir*, 2013, 29: 11310-11316.
- [37] Young T. III. An essay on the cohesion of fluids[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1805: 65-87.
- [38] de Gennes P G, Brochard-wyart F, Quéré D. Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves[M]. New York: Springer, 2004.
- [39] Neumann F E, Wangerin A. Vorlesungen über die theorie der capillarität, gehalten an der universität

- königsberg von Franz Neumann.[M]. Leipzig: B.G. Teubner, 1894.
- [40] Carré A, Gastel J C, Shanahan M E R. Viscoelastic effects in the spreading of liquids[J]. *Nature*, 1996, 379: 432-434.
- [41] Park S J, Weon B M, Lee J S, et al. Visualization of asymmetric wetting ridges on soft solids with X-ray microscopy[J]. *Nature Communications*, 2014, 5: 4369.
- [42] Pu G, Severtson S J. Water evaporation on highly viscoelastic polymer surfaces[J]. *Langmuir*, 2012, 28: 10007-10014.
- [43] Jeon H, Chao Y, Karpitschka S. Moving wetting ridges on ultrasoft gels[J]. *Physical Review E*, 2023, 108: 24611.
- [44] Zhao M, Dervaux J, Narita T, et al. Sliding of liquid droplets on thin viscoelastic soft layers[J]. *Physical Review Fluids*, 2025, 10: 94003.
- [45] Xu Q, Jensen K E, Boltyanskiy R, et al. Direct measurement of strain-dependent solid surface stress [J]. *Nature Communications*, 2017, 8: 555.
- [46] Qian W, Zhao W, Qian T, et al. Emergence and growth dynamics of wetting-induced phase separation on soft solids[J]. *Physical Review Research*, 2024, 6: 33210.
- [47] Nekoonam N, Vera G, Goralczyk A, et al. Controllable wetting transitions on photoswitchable physical gels[J]. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 2023, 15: 27234-27242.
- [48] Zhang H, Zhou Z, Yao Z, et al. Rubbery surface elasticity of polymer glasses[J]. *Macromolecules*, 2025, 58: 13125-13131.
- [49] Marchand A, Das S, Snoeijer J H, et al. Contact angles on a soft solid: from Young's law to Neumann's law[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109: 236101.
- [50] Wang Q, Wang W, Wu C, et al. Wetting-induced elastocapillary deformation of supported thin rubbery polymer films[J]. *Macromolecules*, 2024, 57: 10112-10119.
- [51] Andreotti B, Snoeijer J H. Soft wetting and the Shuttleworth effect, at the crossroads between thermodynamics and mechanics[J]. *Europhysics Letters*, 2016, 113: 66001.
- [52] Pandey A, Andreotti B, Karpitschka S, et al. Singular nature of the elastocapillary ridge[J]. *Physical Review X*, 2020, 10: 31067.
- [53] Essink M. Soft contact: from wetting to adhesion[D]. University of Twente, 2022.
- [54] Weijs J H, Andreotti B, Snoeijer J H. Elasto-capillarity at the nanoscale: on the coupling between elasticity and surface energy in soft solids[J]. *Soft Matter*, 2013, 9: 8494-8503.
- [55] Snoeijer J H, Rolley E, Andreotti B. Paradox of contact angle selection on stretched soft solids[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121: 68003.
- [56] Schulman R D, Dalnoki-Veress K. Liquid droplets on a highly deformable membrane[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115: 206101.
- [57] Kozyreff G, Davidovitch B, Prasath S G, et al. Effect of external tension on the wetting of an elastic sheet[J]. *Physical Review E*, 2023, 107: 35101.
- [58] Shanahan M E R. Equilibrium of liquid drops on thin plates; plate rigidity and stability considerations [J]. *The Journal of Adhesion*, 1987, 20: 261-274.
- [59] Nair V, Sharma I. Equilibria of liquid drops on pre-stretched, nonlinear elastic membranes through a

- variational approach[J]. *Physics of Fluids*, 2023, 35: 047111.
- [60] Nair V, Sharma I, Shankar V. Equilibrium shapes of liquid drops on pre-stretched nonlinear elastic membranes[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2023, 961: A28.
- [61] Liu T, Liu Z, Jagota A, et al. Droplets on an elastic membrane: configurational energy balance and modified Young equation[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, 138: 103902.
- [62] Hui C Y, Jagota A, Nadermann N, et al. Deformation of a solid film with surface tension by a liquid drop[J]. *Procedia IUTAM*, 2015, 12: 116-123.
- [63] Hui C Y, Jagota A. Planar equilibrium shapes of a liquid drop on a membrane[J]. *Soft Matter*, 2015, 11: 8960-8967.
- [64] Py C, Reverdy P, Doppler L, et al. Capillary origami: spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98: 156103.
- [65] Schulman R D, Porat A, Charlesworth K, et al. Elastocapillary bending of microfibers around liquid droplets[J]. *Soft Matter*, 2017, 13: 720-724.
- [66] Bico J, Roman B, Moulin L, et al. Elastocapillary coalescence in wet hair[J]. *Nature*, 2004, 432: 690.
- [67] Kumar D, Russell T P, Davidovitch B, et al. Stresses in thin sheets at fluid interfaces[J]. *Nature Materials*, 2020, 19: 690-693.
- [68] Sanchez D A, Dai Z, Wang P, et al. Mechanics of spontaneously formed nanoblister trapped by transferred 2D crystals[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2018, 115: 7884-7889.
- [69] Dai Z, Rao Y, Lu N. Two-dimensional crystals on adhesive substrates subjected to uniform transverse pressure[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, 257: 111829.
- [70] Rao Y, Kim E, Dai Z, et al. Size-dependent shape characteristics of 2D crystal blisters[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2023, 175: 105286.
- [71] Calis M, Lloyd D, Boddeti N, et al. Adhesion of 2D MoS₂ to graphite and metal substrates measured by a blister test[J]. *Nano Letters*, 2023, 23(7): 2607-2614.
- [72] Ronceray N, Spina M, Chou V H Y, et al. Elastocapillarity-driven 2D nano-switches enable zeptoliter-scale liquid encapsulation[J]. *Nature Communications*, 2024, 15: 185.
- [73] Kumar D, Paulsen J D, Russell T P, et al. Wrapping with a splash: high-speed encapsulation with ultrathin sheets[J]. *Science*, 2018, 359: 775-778.
- [74] Hertz H. Ueber die berührung fester elastischer körper.[J]. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1882, 1882: 156 - 171.
- [75] Anoopnath P R, Babu V S, Vishwanath A K. Hertz contact stress of deep groove ball bearing[J]. *Materials Today: Proceedings*, 2018, 5: 3283-3288.
- [76] Tian J, Su H, Wang Z, et al. Comparative analysis of angular contact bearing stiffness calculated by Hertz contact and thermo-elastohydrodynamic lubrication[J]. *Tribology International*, 2024, 192: 109251.
- [77] Gonzalez-perez I, Iserte J L, Fuentes A. Implementation of Hertz theory and validation of a finite element model for stress analysis of gear drives with localized bearing contact[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, 46: 765-783.
- [78] Muhammad A, Shanono I H. Contact stress analysis of a spur gear using Lewis and Hertz theory[J].

- Applied Research and Smart Technology (ARSTech), 2022, 2: 41-46.
- [79] Derjaguin B V, Muller V M, Toporov Y. Effect of contact deformations on the adhesion of particles [J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1975, 53: 314-326.
- [80] Johnson K L, Kendall K, Roberts A D, et al. Surface energy and the contact of elastic solids[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1971, 324: 301-313.
- [81] Johnson K L. *Contact mechanics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [82] Style R W, Hyland C, Boltyanskiy R, et al. Surface tension and contact with soft elastic solids[J]. *Nature Communications*, 2013, 4: 2728.
- [83] Évora A S, Zhang Z, Johnson S A, et al. Atomic force microscope protocols for characterising the elastoviscoplastic biomechanical properties of corneocytes[J]. *Communications Biology*, 2025, 8: 1747.
- [84] Feng X, Liu T, Wang L, et al. Investigation on JKR surface energy of high-humidity maize grains[J]. *Powder Technology*, 2021, 382: 406-419.
- [85] Liu Z, Lu H, Zheng Y, et al. Transient adhesion in a non-fully detached contact[J]. *Scientific Reports*, 2018, 8: 6147.
- [86] Pham J T, Schellenberger F, Kappl M, et al. From elasticity to capillarity in soft materials indentation [J]. *Physical Review Materials*, 2017, 1: 15602.
- [87] Autumn K, Niewiarowski P H, Puthoff J B. Gecko adhesion as a model system for integrative biology, interdisciplinary science, and bioinspired engineering[J]. *Annual Review of Ecology, Evolution, and Systematics*, 2014, 45: 445-470.
- [88] Jaggannagari S R, Gan Y, Annabattula R K. A comparative study of JKR and DMT contact models for the DEM simulation of powder spreading in additive manufacturing[J]. *Computational Particle Mechanics*, 2025, 12: 1683-1699.
- [89] Linghu C, Liu Y, Yang X, et al. Versatile adhesive skin enhances robotic interactions with the environment[J]. *Science Advances*, 2026, 11: eadt4765.
- [90] Choi S T. Extended JKR theory on adhesive contact of a spherical tip onto a film on a substrate[J]. *Journal of Materials Research*, 2012, 27: 113-120.
- [91] Yuan W, Wang G. An explicit extended JKR model for adhesion between a rigid sphere and an incompressible elastic layer of arbitrary thickness[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2026, 59: 015304.
- [92] Lin Y Y, Chang C F, Lee W T. Effects of thickness on the largely-deformed JKR (Johnson–Kendall–Roberts) test of soft elastic layers[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45: 2220-2232.
- [93] Ciavarella M, Tricarico M, Papangelo A. On the dynamic JKR adhesion problem[J]. *Mechanics of Materials*, 2025, 202: 105252.
- [94] Giudici A, Vella D, Griffiths I. Mechanics of elliptical JKR-type adhesive contact[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2025, 58: 085301.
- [95] Griffith A A. VI. The phenomena of rupture and flow in solids[J]. *Philosophical Transactions of*

- the Royal Society of London, Series A: Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 1921, 221: 163-198.
- [96] Kendall K. Thin-film peeling-the elastic term[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1975, 8: 1449.
- [97] Long R, Shull K R, Hui C Y. Large deformation adhesive contact mechanics of circular membranes with a flat rigid substrate[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2010, 58(9): 1225-1242.
- [98] Wood J D, Harvey C M, Wang S. Adhesion toughness of multilayer graphene films[J]. *Nature Communications*, 2017, 8: 1952.
- [99] Kruglova O, Brau F, Villers D, et al. How geometry controls the tearing of adhesive thin films on curved surfaces[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107: 164303.
- [100] Borodich F M, Galanov B A. Contact probing of stretched membranes and adhesive interactions: graphene and other two-dimensional materials[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2016, 472: 20160550.
- [101] Argatov I I. Indentation mapping of stretched adhesive membranes[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2021, 477: 20210349.
- [102] Yang X, Srivastava A, Long R. Adhesive contact of an inflated circular membrane with curved surfaces[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2023, 279: 112371.
- [103] Roman B, Bico J. Elasto-capillarity: deforming an elastic structure with a liquid droplet[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2010, 22: 493101.
- [104] Schroll R D, Adda-bedia M, Cerda E, et al. Capillary deformations of bendable films[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111: 014301.
- [105] Andreotti B, Snoeijer J H. Statics and dynamics of soft wetting[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2020, 52: 285-308.
- [106] Jerison E R, Xu Y, Wilen L A, et al. Deformation of an elastic substrate by a three-phase contact line [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106: 186103.
- [107] Limat L. Straight contact lines on a soft, incompressible solid[J]. *The European Physical Journal E*, 2012, 35: 134.
- [108] Style R W, Dufresne E R. Static wetting on deformable substrates, from liquids to soft solids[J]. *Soft Matter*, 2012, 8: 7177-7184.
- [109] Lubbers L A, Weijs J H, Botto L, et al. Drops on soft solids: free energy and double transition of contact angles[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2014, 747: R1.
- [110] Duprat C, Protière S, Beebe A Y, et al. Wetting of flexible fibre arrays[J]. *Nature*, 2012, 482: 510-513.
- [111] Davidovitch B, Vella D. Partial wetting of thin solid sheets under tension[J]. *Soft Matter*, 2018, 14: 4913-4934.
- [112] Fortais A, Schulman R D, Dalnoki-Veress K. Liquid droplets on a free-standing glassy membrane: deformation through the glass transition[J]. *The European Physical Journal E*, 2017, 40: 69.
- [113] Zhang J, Jia K, Huang Y, et al. Intrinsic wettability in pristine graphene[J]. *Advanced Materials*, 2022, 34: 2103620.
- [114] Junaedi H, Abd el-baky M, M. Awdallah M, et al. Mechanical characteristics of sandwich structures

- with 3D-printed bio-inspired gyroid structure core and carbon fiber-reinforced polymer laminate face-sheet[J]. *Polymers*, 2024, 16: 1698.
- [115] Wang B, Wei Y, Yuan S, et al. Enhanced bending performance of assembly honeycomb structure sandwich panels: effects of core configuration and local reinforcement[J]. *Thin-Walled Structures*, 2025, 215: 113597.
- [116] Lei P, Li Y, Li D, et al. Conceptual design and application research of a corrugated flexible skin with high bending stiffness[J]. *The Aeronautical Journal*, 2023, 127: 346-369.
- [117] Kuwada R, Ito S, Shimoda Y, et al. Tensegrity-inspired polymer films: progressive bending stiffness through multipolymeric patterning[J]. *Polymer Journal*, 2025, 57: 587-594.
- [118] Nadermann N, Hui C Y, Jagota A. Solid surface tension measured by a liquid drop under a solid film [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2013, 110: 10541-10545.
- [119] Yariv E. Shape of sessile drops at small contact angles[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022, 950: R4.
- [120] Bico J, Étienne reyssat, Roman B. Elastocapillarity: when surface tension deforms elastic solids[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2018, 50: 629-659.
- [121] Mora S, Maurini C, Phou T, et al. Solid drops: large capillary deformations of immersed elastic rods [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111: 114301.
- [122] Lee C, Wei X, Kysar J W, et al. Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene[J]. *Science*, 2008, 321: 385-388.
- [123] Koenig S P, Boddeti N G, Dunn M L, et al. Ultrastrong adhesion of graphene membranes[J]. *Nature Nanotechnology*, 2011, 6(9): 543-546.
- [124] Bertolazzi S, Brivio J, Kis A. Stretching and breaking of ultrathin MoS₂[J]. *ACS Nano*, 2011, 5(12): 9703-9709.
- [125] Boddeti N G, Koenig S P, Long R, et al. Mechanics of adhered, pressurized graphene blisters[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2013, 80(4): 040909.
- [126] Cao Z, Wang P, Gao W, et al. A blister test for interfacial adhesion of large-scale transferred graphene [J]. *Carbon*, 2014, 69: 390-400.
- [127] Lloyd D, Liu X, Boddeti N, et al. Adhesion, stiffness, and instability in atomically thin MoS₂ bubbles [J]. *Nano Letters*, 2017, 17(9): 5329-5334.
- [128] Dai Z, Hou Y, Sanchez D A, et al. Interface-governed deformation of nanobubbles and nanotents formed by two-dimensional materials[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(26): 266101.
- [129] Wang G, Dai Z, Xiao J, et al. Bending of multilayer van der Waals materials[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(11): 116101.
- [130] Fang Z, Dai Z, Wang B, et al. Pull-to-peel of two-dimensional materials for the simultaneous determination of elasticity and adhesion[J]. *Nano Letters*, 2022, 23(2): 742-749.
- [131] Vella D, Davidovitch B. Indentation metrology of clamped, ultra-thin elastic sheets[J]. *Soft Matter*, 2017, 13: 2264-2278.
- [132] Ni Z, Wang Y, Yu T, et al. Raman spectroscopy and imaging of graphene[J]. *Nano Research*, 2008, 1: 273-291.

- [133] Ferrari A C, Meyer J C, Scardaci V, et al. Raman spectrum of graphene and graphene layers[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 97: 187401.
- [134] Ferrari G A, de oliveira A B, Silvestre I, et al. Apparent softening of wet graphene membranes on a microfluidic platform[J]. *ACS Nano*, 2018, 12: 4312-4320.
- [135] Dai Z, Lu N. Poking and bulging of suspended thin sheets: slippage, instabilities, and metrology[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2021, 149: 104320.
- [136] Xu X, Jagota A, Paretkar D, et al. Surface tension measurement from the indentation of clamped thin films[J]. *Soft Matter*, 2016, 12: 5121-5126.
- [137] do Carmo M P. *Differential geometry of curves and surfaces*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- [138] Chandler T G, Vella D. Indentation of suspended two-dimensional solids: the signatures of geometrical and material nonlinearity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, 144: 104109.
- [139] Ciavarella M, Joe J, Papangelo A, et al. The role of adhesion in contact mechanics[J]. *Journal of the Royal Society Interface*, 2019, 16: 20180738.
- [140] Yu C, Zeng W, Wang B, et al. Stiffer is stickier: adhesion in elastic nanofilms[J]. *Nano Letters*, 2025, 25: 1876-1882.
- [141] Gurtin M, Murdoch A. Surface stress in solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, 14: 431-440.
- [142] Duan H L, Wang J, Karihaloo B L. Theory of elasticity at the nanoscale[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 2009, 42: 1-68.
- [143] Liu Y, Wei Y. Effect of surface energy on the indentation response of hard nanofilm/soft substrate composite structure[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 185: 105759.
- [144] Cao K, Feng S, Han Y, et al. Elastic straining of free-standing monolayer graphene[J]. *Nature Communications*, 2020, 11: 284.
- [145] Du F, Huang J, Duan H, et al. Wetting transparency of supported graphene is regulated by polarities of liquids and substrates[J]. *Applied Surface Science*, 2018, 454: 249-255.
- [146] Rafiee J, Mi X, Gullapalli H, et al. Wetting transparency of graphene[J]. *Nature Materials*, 2012, 11: 217-222.
- [147] Zhao Y, Wang G, Huang W, et al. Investigations on the wettability of graphene on a micron-scale hole array substrate[J]. *RSC Advances*, 2016, 6: 1999-2003.
- [148] Li X, Li Z, Long Y, et al. Wetting stability of supported graphene in ambient environment[J]. *Advanced Engineering Materials*, 2022, 24: 2101283.
- [149] Shin Y J, Wang Y, Huang H, et al. Surface-energy engineering of graphene[J]. *Langmuir*, 2010, 26: 3798-3802.
- [150] Ondarçuhu T, Thomas V, Nuñez M, et al. Wettability of partially suspended graphene[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 24237.
- [151] Wang H, Orejon D, Song D, et al. Non-wetting of condensation-induced droplets on smooth monolayer suspended graphene with contact angle approaching 180 degrees[J]. *Communications Materials*,

- 2022, 3: 75.
- [152] Prydatko A V, Belyaeva L A, Jiang L, et al. Contact angle measurement of free-standing square-millimeter single-layer graphene[J]. *Nature Communications*, 2018, 9: 4185.
- [153] Barber J R. Contact mechanics[M]. Cham: Springer, 2018.
- [154] van Engers C D, Cousens N E A, Babenko V, et al. Direct measurement of the surface energy of graphene[J]. *Nano Letters*, 2017, 17: 3815-3821.
- [155] Wei Y, Wang B, Wu J, et al. Bending rigidity and gaussian bending stiffness of single-layered graphene [J]. *Nano Letters*, 2013, 13: 26-30.
- [156] Han E, Yu J, Annevelink E, et al. Ultrasoft slip-mediated bending in few-layer graphene[J]. *Nature Materials*, 2020, 19: 305-309.
- [157] Sun P Z, Yang Q, Kuang W J, et al. Limits on gas impermeability of graphene[J]. *Nature*, 2020, 579: 229-232.
- [158] Sun P Z, Yagmurcukardes M, Zhang R, et al. Exponentially selective molecular sieving through angstrom pores[J]. *Nature Communications*, 2021, 12: 7170.
- [159] Freund L B, Suresh S. Thin film materials: stress, defect formation and surface evolution[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [160] Vella D. Buffering by buckling as a route for elastic deformation[J]. *Nature Reviews Physics*, 2019, 1(7): 425-436.
- [161] Akinwande D, Brennan C J, Bunch J S, et al. A review on mechanics and mechanical properties of 2D materials—Graphene and beyond[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2017, 13: 42-77.
- [162] Style R W, Jagota A, Hui C Y, et al. Elastocapillarity: surface tension and the mechanics of soft solids [J]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2017, 8(1): 99-118.
- [163] Paulsen J D. Wrapping liquids, solids, and gases in thin sheets[J]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2019, 10(1): 431-450.
- [164] Otto F. Modeling with soap films[EB/OL]. 2015. <https://www.youtube.com/watch?v=-IW7o25NmeA>.
- [165] Goldsmith N. The physical modeling legacy of Frei Otto[J]. *International Journal of Space Structures*, 2016, 31(1): 25-30.
- [166] Dai Z, Lu N, Liechti K M, et al. Mechanics at the interfaces of 2D materials: challenges and opportunities[J]. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 2020, 24(4): 100837.
- [167] Yi X, Shi X, Gao H. Cellular uptake of elastic nanoparticles[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(9): 098101.
- [168] Hu J, Youssefian S, Obayemi J, et al. Investigation of adhesive interactions in the specific targeting of TRIPTORELIN-conjugated PEG-coated magnetite nanoparticles to breast cancer cells[J]. *Acta Biomaterialia*, 2018, 71: 363-378.
- [169] Krieg M, Fläschner G, Alsteens D, et al. Atomic force microscopy-based mechanobiology[J]. *Nature Reviews Physics*, 2019, 1(1): 41-57.
- [170] Williams J. Energy release rates for the peeling of flexible membranes and the analysis of blister tests [J]. *International Journal of Fracture*, 1997, 87: 265-288.

- [171] Plaut R H, White S A, Dillard D A. Effect of work of adhesion on contact of a pressurized blister with a flat surface[J]. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2003, 23(3): 207-214.
- [172] Shi J, Müftü S, Wan K T. Adhesion of an elastic convex shell onto a rigid plate[J]. *The Journal of Adhesion*, 2011, 87(6): 579-594.
- [173] Zhu T, Li G, Müftü S, et al. Revisiting the constrained blister test to measure thin film adhesion[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, 84(7): 071005.
- [174] Zhu T, Müftü S, Wan K t. One-dimensional constrained blister test to measure thin film adhesion[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2018, 85(5).
- [175] Chen E, Dai Z. Axisymmetric peeling of thin elastic films: a perturbation solution[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2023, 90(10).
- [176] Patil A, Nordmark A, Eriksson A. Free and constrained inflation of a pre-stretched cylindrical membrane[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2014, 470(2169): 20140282.
- [177] Patil A, Dasgupta A, Eriksson A. Contact mechanics of a circular membrane inflated against a deformable substrate[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, 67: 250-262.
- [178] Long R, Hui C Y. Axisymmetric membrane in adhesive contact with rigid substrates: analytical solutions under large deformation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, 49(3-4): 672-683.
- [179] Srivastava A, Hui C Y. Large deformation contact mechanics of a pressurized long rectangular membrane. II. Adhesive contact[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2013, 469(2160): 20130425.
- [180] Laprade E J, Long R, Pham J T, et al. Large deformation and adhesive contact studies of axisymmetric membranes[J]. *Langmuir*, 2013, 29(5): 1407-1419.
- [181] Rao Y, Qiao S, Dai Z, et al. Elastic wetting: substrate-supported droplets confined by soft elastic membranes[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2021, 151: 104399.
- [182] Wang G, Najafi F, Ho K, et al. Mechanical size effect of freestanding nanoconfined polymer films [J]. *Macromolecules*, 2022, 55: 1248-1259.
- [183] Shanahan M E. Adhesion of a punch to a thin membrane[J]. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IV - Physics*, 2000, 1(4): 517-522.
- [184] Ru C. Adhesion of an elastic sphere on a tensioned membrane[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2020, 25(8): 1534-1543.
- [185] Yuan W, Wang G. Adhesion between a rigid sphere and a stretched membrane using the Dugdale model[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, 208-209: 214-220.
- [186] Yuan W, Ding Y, Niu X, et al. Adhesion of a rigid sphere to a freestanding elastic membrane with pre-tension[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2024, 91.
- [187] Snoeijer J H, Andreotti B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2013, 45(1): 269-292.
- [188] Israelachvili J N. *Intermolecular and surface forces*[M]. Burlington: Academic Press, 2011.
- [189] Scheludko A, Nikolov D. Measurement of surface tension by pulling a sphere from a liquid[J]. *Colloid*

- and Polymer Science, 1975, 253: 396-403.
- [190] Feng D, Nguyen A V. Effect of contact angle and contact angle hysteresis on the floatability of spheres at the air-water interface[J]. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2017, 248: 69-84.
- [191] Hui C Y, Liu T, Salez T, et al. Indentation of a rigid sphere into an elastic substrate with surface tension and adhesion[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2015, 471: 20140727.
- [192] Zhu Y, Ni Y, Huang C, et al. Unified model for adhesive contact between solid surfaces at micro/nano-scale[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2024, 196: 106004.
- [193] Thouless M, Jensen H. Elastic fracture mechanics of the peel-test geometry[J]. *The Journal of Adhesion*, 1992, 38(3-4): 185-197.
- [194] Hutchinson J W, Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1991, 29: 63-191.
- [195] Mansfield E H. *The bending and stretching of plates*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [196] Audoly B, Pomeau Y. *Elasticity and geometry*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2010.
- [197] Eremeyev V A, Naumenko K. A relationship between effective work of adhesion and peel force for thin hyperelastic films undergoing large deformation[J]. *Mechanics Research Communications*, 2015, 69: 24-26.
- [198] Rivlin R.S. *The effective work of adhesion*[M]//*Collected Papers of R.S. Rivlin*. New York: Springer, 1997: 2611-2614.
- [199] Khestanova E, Guinea F, Fumagalli L, et al. Universal shape and pressure inside bubbles appearing in van der Waals heterostructures[J]. *Nature Communications*, 2016, 7(1): 12587.
- [200] Kitt A L, Qi Z, Rémi S, et al. How graphene slides: measurement and theory of strain-dependent frictional forces between graphene and SiO₂[J]. *Nano Letters*, 2013, 13(6): 2605-2610.
- [201] Wang G, Dai Z, Wang Y, et al. Measuring interlayer shear stress in bilayer graphene[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(3): 036101.
- [202] Zhang K, Arroyo M. Coexistence of wrinkles and blisters in supported graphene[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2017, 14: 23-30.
- [203] Yin Y, Dang R, Wu D, et al. Mechanics of microblister tests in 2D materials accounting for frictional slippage[J]. *Carbon*, 2024, 229: 119495.
- [204] Genrivint A N. A new constitutive relation for rubber[J]. *Rubber Chemistry and Technology*, 1996, 69: 59-61.
- [205] Rivlin R. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1948, 240(822): 459-490.
- [206] Zeng W, Dai Z, Wei Y. Adhesion of elastic membranes. Part I: a generalized Tabor parameter[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2026, 482: 20250932.
- [207] Youngbin L. Modeling van der Waals interaction in Abaqus using UINTER[Z]. 2024.

- [208] Gurtin M E, Murdoch A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1975, 57: 291-323.
- [209] Intarit P, Senjuntichai T, Rungamornrat J. Elastic layer under axisymmetric indentation and surface energy effects[J]. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2018, 69: 29.
- [210] Yuan W, Wang G. Cylindrical indentation of an elastic bonded layer with surface tension[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 65: 597-613.
- [211] Olives J. A combined capillarity and elasticity problem for a thin plate[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1996, 56(2): 480-493.
- [212] Neukirch S, Antkowiak A, Marigo J J. Soft beams: when capillarity induces axial compression[J]. *Physical Review E*, 2014, 89: 12401.
- [213] Henkel C, Essink M H, Hoang T, et al. Soft wetting with (a)symmetric Shuttleworth effect[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2022, 478: 20220132.
- [214] Salez T, Benzaquen M, Élie raphaël. From adhesion to wetting of a soft particle[J]. *Soft Matter*, 2013, 9: 10699-10704.
- [215] Gao X, Hao F, Huang Z, et al. Mechanics of adhesive contact at the nanoscale: the effect of surface stress[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, 51: 566-574.
- [216] Long J, Wang G, Feng X Q, et al. Effects of surface tension on the adhesive contact between a hard sphere and a soft substrate[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, 84: 133-138.
- [217] Zhu X, Xu W, Qin Y. Effect of surface tension on the behavior of adhesive contact based on Maugis-Dugdale model[J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2020, 81: 103930.
- [218] Jia N, Yao Y, Peng Z, et al. Surface effect in nanoscale adhesive contact[J]. *The Journal of Adhesion*, 2021, 97: 380-398.
- [219] Delfour M C, Zolésio J P. Shapes and geometries: analysis, differential calculus, and optimization [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [220] Eshelby J D. The force on an elastic singularity[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1951, 244: 87-112.
- [221] Duan H L, Wang J, Huang Z P, et al. Eshelby formalism for nano-inhomogeneities[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2005, 461: 3335-3353.
- [222] Duan H L, Wang J, Huang Z P, et al. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53: 1574-1596.

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1999年4月出生于山东省泰安市。

2017年9月考入中国海洋大学工程学院土木工程专业,2021年6月本科毕业并获得工学学士学位。

2021年9月考入北京大学力学系攻读固体力学博士学位,师从戴兆贺助理教授。

科研成果

- [1] **Zheng W**, Gao Z, Yu C, Yin J, Dai Z. Revealing surface tension in elastic membranes via indentation[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2026, 83: 102455. (SCI 收录期刊; SCI 收录号 001688968100001; IF=4.5)
- [2] Gao Z, **Zheng W**, Liu X, Kou Z, Liu Z, Wang X, Long Y, Yu C, Li B, Li J, Li X, Qiao R, Liu X, Wang L, Dai Z, Yin J. Visualizing elastocapillary expansion of graphene through bulge tests[J]. *Nano Letters*, 2026, 26(3): 1118-1124. (SCI 收录期刊; SCI 收录号 001661975600001; IF=9.1)
- [3] **Zheng W**, Dai Z. Universal pull-off force for separating a rigid sphere from a membrane[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2025, 201: 106163. (SCI 收录期刊; SCI 收录号 001489413800001; IF=6.0)

致谢

五年前，离开大学校园，告别日日经过的体育馆时，我脑海中的理解是钢结构大跨建筑，未曾想会与薄膜结构结下一段不解之缘；五年后的今天，从微观尺度的石墨烯薄膜到宏观尺度的体育馆屋面，我以薄膜结构为研究对象，度过了博士阶段。在此，谨向这一过程中给予我指导与帮助的老师 and 朋友们致以诚挚的感谢。

我首先要感谢我的导师戴兆贺研究员。戴老师给予我进入课题组学习与研究的宝贵机会，并在研究方向、内容与方法等方面提供了全面而细致的指导；在课题推进、论文写作及学术交流中，亦始终给予系统而深入的支持。尤为珍贵的是，戴老师在逻辑构建与思维方式层面的深刻启发，使我对如何发现科学问题、构建研究框架、系统推进问题解决以及清晰表达研究成果形成了初步但明确的认识，这种影响将贯穿我今后的研究、工作乃至生活。此外，在我遭遇研究瓶颈、心生畏难之时，戴老师引导我学会拆解问题、整合思路、把握关键，从而得以持续推进研究工作。其指导不仅体现在专业知识层面，更体现在科研方法与处理问题的思维方式上，对我产生了深远而持久的影响，也为我今后更加独立地开展工作奠定了重要基础。

感谢南京航空航天大学殷俊教授，殷老师的无私协助让本文第三章的实验工作得以顺利开展。感谢南京航空航天大学高志达博士在实验完成过程中的有力合作。

感谢北京航空航天大学刘雁韦老师在科研思路方面的交流与指点。感谢孙艺萌博士、马小杰博士在学习与科研方法上的交流。感谢上海大学焦淑平老师在液滴润湿、柔性纳米通道等方面的讨论与启发。感谢课题组博士后李航、李居曜、王文祥，博士于川立、陈尔腾、曾维嘉、曹嘉聪、陆煌，硕士张国政、李世晗、岑昶，本科生邹济宇、王俊骞、李奇楠、李瑀堃、卢浙萌、龙想等师兄姐妹的艰苦奋斗与讨论交流。

感谢课题组秘书张婷老师、覃汝庆老师在生活和学习上的帮助与陪伴。

感谢北京大学力学与科学学院教务李曼老师在论文提交、答辩资料准备等方面的细致指导。

感谢家人在生活中的支持。感谢天津大学倪锦远博士在生活中的照顾与科研思维等方面的切磋及共同进步。