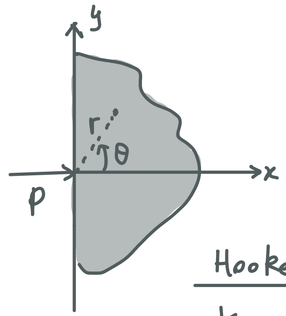
第八章 §10 接触问题

Boussinesq solution



$$\boxed{\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0}$$

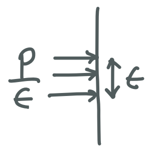
$$\xrightarrow[\text{Kinematics}]{\text{Hooke's law}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_r &= -\frac{\kappa+1}{4\pi\mu} P \ln r \cos\theta - \frac{\kappa-1}{4\pi\mu} P\theta \sin\theta + u_0 \cos\theta + v_0 \sin\theta \\ u_\theta &= \frac{\kappa+1}{4\pi\mu} P \ln r \sin\theta - \frac{\kappa-1}{4\pi\mu} P\theta \cos\theta + \frac{P}{2\pi\mu}\sin\theta - u_0 \sin\theta + v_0 \cos\theta + \omega_0 r \end{aligned}}$$

注意：积分常数 $\{u_0, v_0, \omega_0\}$ 对应于笛卡尔坐标系下的刚体位移，包括平动与转动.

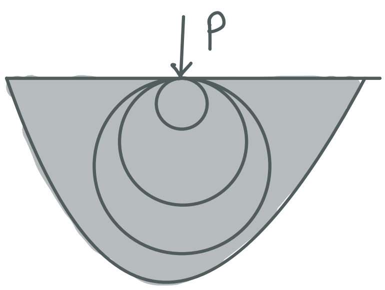
$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu, & \text{平面应变} \\ \dfrac{3-\nu}{\nu+1}, & \text{平面应力} \end{cases}$$

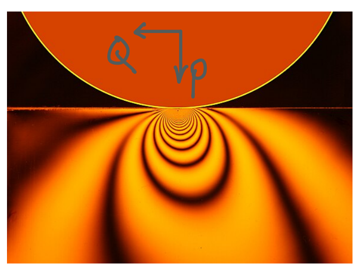
附注：① 应力场在 $r \to 0$ 时存在 r^{-1} 奇异性



$$\underline{\underline{p(x) = P\,\delta(x)}}$$

② $\sigma_r = \text{Constant}$ 的轮廓线与半平面相切于加载点.





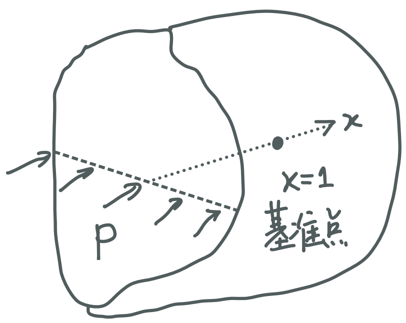
③ 位移场在 $r \to 0$ 和 $r \to \infty$ 时存在 log 奇异性，例如

在 $\theta = 0$，无刚体位移时，$u_r = -\frac{\kappa+1}{4\pi\mu} P \ln r = u_x$， $u_\theta = u_y = 0$

在 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$，无刚体位移时，$u_r = -\frac{\kappa-1}{8\mu} P = \pm u_y$

$$u_\theta = \pm \frac{\kappa+1}{4\pi\mu} P \ln r \pm \frac{P}{2\pi\mu} = \mp u_x$$

$\ln r$ 的量纲?



$P \sim$ [力]/[长度]

• 以 $\theta=0$ 为例

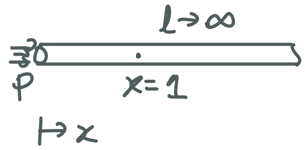
若在 $x=d$ 处 $u_x=0$，替换为d

$$u_x = -\frac{K+1}{4\pi\mu} P \ln(x/1)$$

Q: 猜测半空间的 u_x?

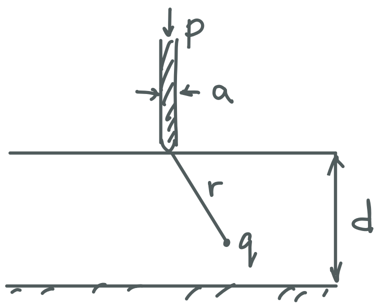
• 可以理解 $r\to 0$，$u_x \to -\infty$ 来自奇异集中力

如何理解 $r\to\infty$ 时，$u_x \to +\infty$? 答案: 基准点的选择



$$u_x = \frac{P}{EA}(1-x)$$

④ 尽管该解答有"病态"的行为，其可提供具体物理问题的近似



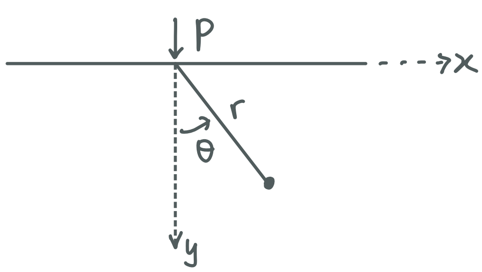
当 $d \gg a$ 时，取 $x=d$ 为基准点

在q点处，若 $r/a \gg 1$，Boussinesq 是很好的近似.

在 $r\sim a$ 附近发生了什么?! Boussinesq 仍然有用，但需要采用 Green's function 方法!

Green's function

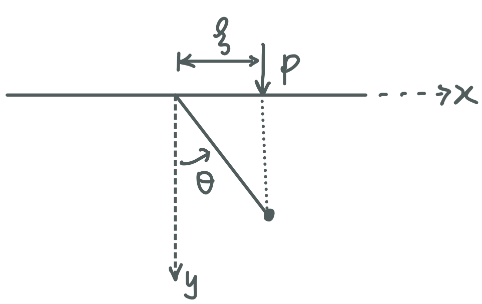
首先，变换坐标系如下:



$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi}\frac{x^2 y}{r^4}$$

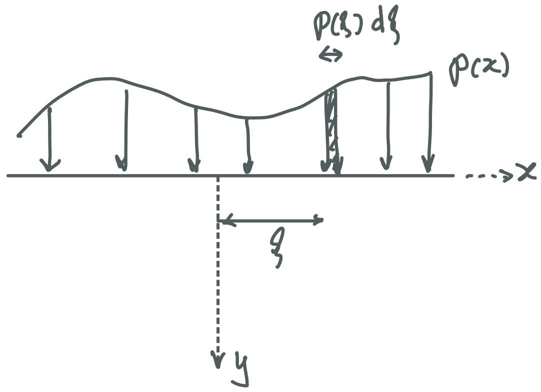
$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi}\frac{y^3}{r^4}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi}\frac{x y^2}{r^4}, \quad r^2 = x^2+y^2$$



只需将 $x \longrightarrow x-\xi$

例如: $\sigma_x = -\dfrac{2P}{\pi}\dfrac{(x-\xi)^2 y}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}$



对于分布压力 $p(x)$，我们有

$$\boxed{\sigma_x = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{(x-\xi)^2 y}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}\, p(\xi)\, d\xi}$$

注：对于作用于 $x=\xi$ 处的集中力 P，$p(x) = P\delta(x-\xi)$

然后，同样考虑在 $y=0$（半平面表面）处的位移场，对于在 $x=0$ 处的集中力 P.

$$x>0,\quad u_x = u_r\Big|_{\substack{\theta=\pi/2\\ r=x}} = -\frac{K-1}{8\mu}P + \text{Rigid}\cdots$$

$$u_y = -u_\theta\Big|_{\substack{\theta=\pi/2\\ r=x}} = -\frac{K+1}{4\pi\mu}P\ln x + \text{Rigid}\cdots$$

$$x>0,\quad u_x = -u_r\Big|_{\substack{\theta=-\pi/2\\ r=|x|}} = +\frac{K-1}{8\mu}P + \text{Rigid}$$

$$u_y = u_\theta\Big|_{\substack{\theta=-\pi/2\\ r=|x|}} = -\frac{K+1}{4\pi\mu}P\ln|x| + \text{Rigid}\cdots$$

$$\Rightarrow \text{在 } y=0 \text{ 面上，}\quad \boxed{u_x = -\frac{K-1}{8\mu}P\,\operatorname{sign}x\ ;\quad u_y = -\frac{K+1}{4\pi\mu}P\ln|x|}$$

考虑在分布力 $p(x)$ 作用下的半平面表面竖向位移 $v(x) = u_y(x, y=0)$：

Green function for $v(x)$

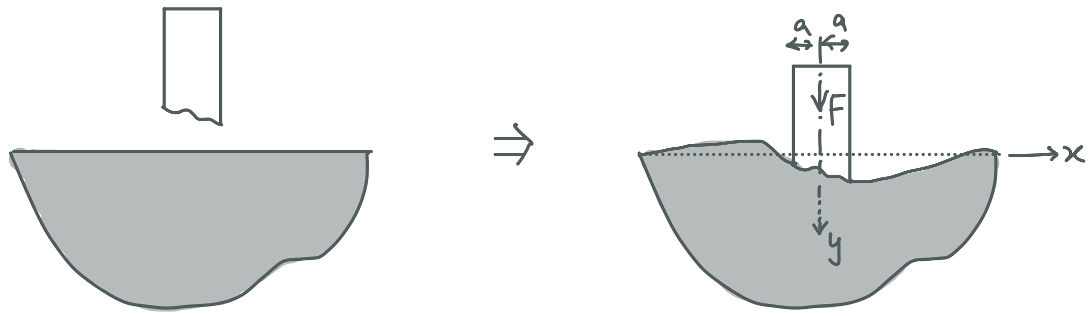
$$v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{K+1}{4\pi\mu}\, p(\xi)\ln|x-\xi|\, d\xi$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = -\frac{K+1}{4\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-\xi}\cdot p(\xi)\, d\xi$$

Cauchy Kernal

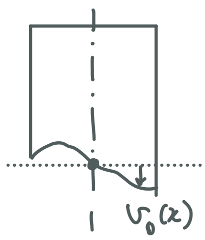
接触问题

不失一般性，先考虑刚性压头



沿压头中心线建立y轴，假设作用力F沿压头中心线，假设整个压头平面与半平面建立了接触.（需验证具体所需F），假设界面无剪切作用力（No-shear）

设压头形状为 $v_0(x)$



$v_0(0)=0$

因此，半平面表面在接触状态下所产生的位移为

可能的转动

$$v(x) = v_0(x) + \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 x\,, \quad |x|<a$$

压头刚体位移

这是一个混合边值问题：$\nabla^4\phi=0$ subject to $u_y(y=0)=v(x)$, $\tau_{xy}(y=0)=0$ for $|x|<a$

$\sigma_y(y=0)=0$ for $|x|>a$.

我们采用 Green's function 方法求解 $|x|<a$ 区域内的 $\sigma_y(y=0)$, i.e., $p(x)$ 使得

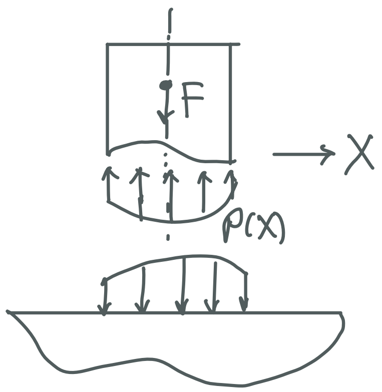
$$v_0(x)+\mathcal{C}_0+\mathcal{C}_1 x = -\frac{\kappa+1}{4\pi\mu}\int_{-a}^{a}\ln|x-\xi|\,p(\xi)\,d\xi$$

或 $$\frac{dv_0}{dx}+\mathcal{C}_1 = -\frac{\kappa+1}{4\pi\mu}\int_{-a}^{a}\frac{1}{x-\xi}\,p(\xi)\,d\xi$$

定义"柔度" $K=\frac{\kappa+1}{4\pi\mu}$，引入无量纲化参数：$X=x/a$，$t=\xi/a$，现在需解答积分方程

$$\frac{1}{a}\frac{dv_0(x)}{dx} + C_1 = +K\int_{-a}^{a}\frac{1}{t-x}p(t)\,dt$$

此问题有2个补充条件（用于求解 C_0, C_1）



$$\Sigma F=0 \rightarrow F=\int_{-a}^{a}p(\xi)\,d\xi = a\int_{-1}^{1}p(t)\,dt$$

$$\Sigma M=0 \rightarrow 0=\int_{-a}^{a}p(\xi)\xi\,d\xi = a^2\int_{-a}^{a}p(t)t\,dt$$

这一类积分方程可以通过级数法求解，具体为 Chebyshev 多项式

· 第一类 Chebyshev 多项式 $T_n(t)$，$-1\le t\le 1$

$T_0=1$，$T_1=t$，$T_2=2t^2-1$，$\cdots$，$T_{n+1}=2t\cdot T_n - T_{n-1}$

性质：① $T_n(1)\equiv 1$，$T_n(-1)=(-1)^n$

② $$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \begin{cases}0, & m\ne n\\ \pi, & m=n=0\\ \pi/2, & \text{其它}\end{cases}$$ 正交性

③ $$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}dt = \begin{cases}0, & n=0\\ \pi U_{n-1}(x), & n\ge 1\end{cases}$$

· 第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(t)$，$-1\le t\le 1$

$U_0=1$，$U_1=2t$，$U_2=4t^2-1$，$\cdots$，$U_{n+1}=2t\cdot U_n-U_{n-1}$

性质：① $$\int_{-1}^{1}U_m(t)U_n(t)\sqrt{1-t^2}\,dt=\begin{cases}0, & m\ne n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\end{cases}$$

② $$\int_{-1}^{1}\frac{U_n(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt = \pi T_n(x)$$

我们通过观察式正交关系将已知的 $\frac{dv_0}{dx}$ 展开为 $\frac{dv_0(x)}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nU_n(x)$

并将未知的 $p(t)$ 展开为 $p(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{n=0}^{\infty}C_nT_n(t)$

why?

代入积分方程 ⇒ $\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n(x) + \mathcal{C}_1 = \pi K \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_{n-1}(x)$

or $\left(\frac{1}{a} b_0 + \mathcal{C}_1 - \pi K c_1\right) U_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a} b_n - \pi K c_{n+1}\right) U_n = 0$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{\pi K}\left(\frac{1}{a} b_0 + \mathcal{C}_1\right)$$

$$c_n = \frac{1}{\pi K a} b_n \quad , \quad n \geq 2$$

b_n"可知", 如何确定 $\mathcal{C}_1$ 以及 c_0

回到关于压头的受力平衡条件

$$F = a\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = a\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, c_n T_n(t)\cdot \underbrace{T_0(t)}_{=1}\,dt = \pi a c_0$$

→ $c_0 = F/(\pi a)$ 与压头形状无关!!

$$0 = a^2\int_{-1}^{1} p(t)\,t\,dt = a^2\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} c_n \frac{T_n(t)\,\overbrace{T_1(t)}^{=t}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}a^2 c_1$$

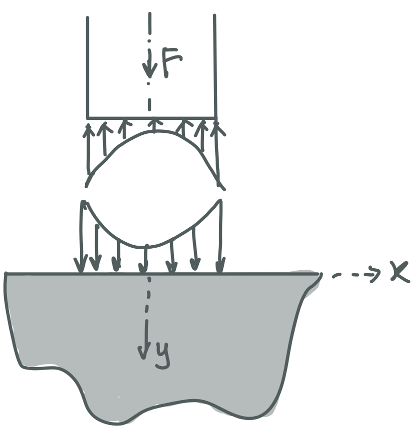
→ $c_1 = 0$ (因此, $\underbrace{\mathcal{C}_1}_{v_0(x)\text{ 的线性部分}} = -b_0/a$)

特殊形状: 平压头

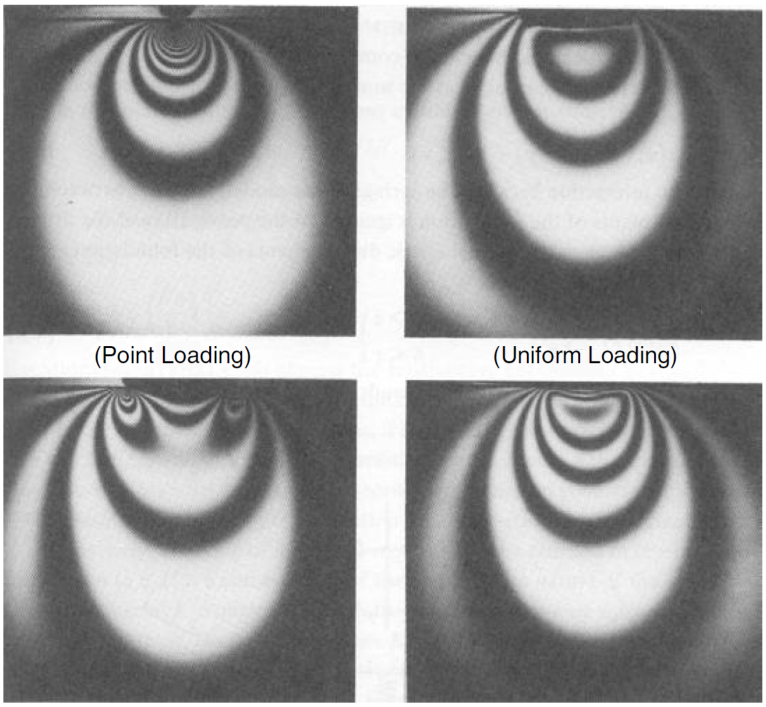
平压头形状 $v_0(x) = 0 \to b_n = 0 \quad , \quad n \geq 0$

$$\to \mathcal{C}_1 = 0, \quad c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p(t) = \frac{F}{\pi a\sqrt{1-t^2}} \quad \text{or} \quad p(x) = \frac{F}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$$

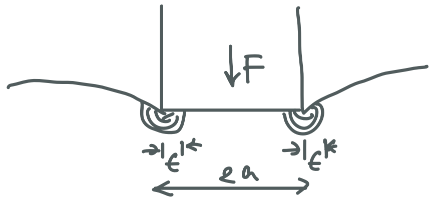


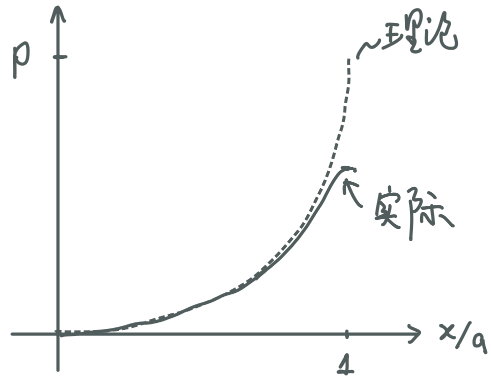
- 压力在 $|x| \to a$ 时有"平方根奇异性" (squre-root singularity)
- 压头的有限刚度或平面的非弹性会"缓解"该奇异性.
- 只要 $\frac{\epsilon}{a} \ll 1$, 非弹性对远离压头边界的区域的影响可忽略.



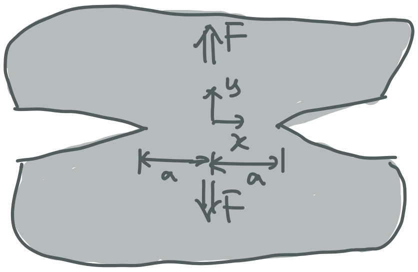
(Point Loading) (Uniform Loading)

(Flat Punch Loading) (Cylinder Contact Loading)





附注: ① 该结果可被用于理解下面的断裂力学问题



$y=0$, $|x|>a$, $p(x)=0$ & $\tau_{xy}=0$

$y=0$, $|x|<a$, $v(x)=\delta$ & $\underbrace{\tau_{xy}=0}_{\text{对称性}}$

② 在给定F下，如何求解 C_0 — 其物理意义为压头压入深度 δ?

$$v(x)=\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{\kappa+1}{4\pi\mu}\,p(\xi)\,\underbrace{\ln|x-\xi|}_{\text{量纲不清!}}\,d\xi$$

$$v(x)=\begin{cases}\delta, & |x|\le a\\ \delta-\dfrac{2(1-\nu^2)P}{\pi E}\ln\left[\dfrac{|x|}{a}+\left(\dfrac{x^2}{a^2}-1\right)^{1/2}\right], & |x|>a,\end{cases}$$

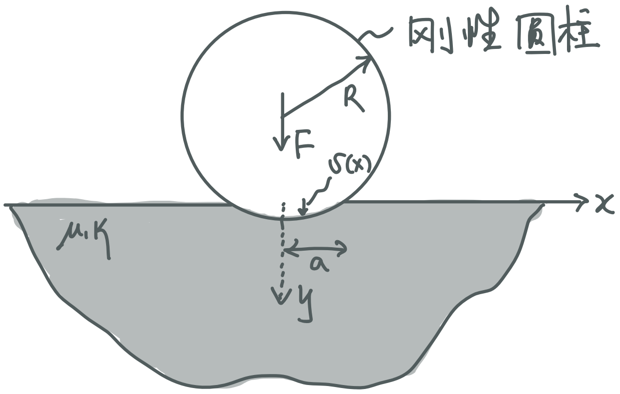
需具体的基准点来确定

(P38, Johnson, 1985)

③ $u_x=-\dfrac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{\pi E}\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)\operatorname{sign}x$, $|x|<a$ (Green's function 方法)

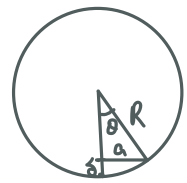
对于可压缩材料，表面会产生向压头中心的水平变形. 因此摩擦效应可能会起作用. 注意 $\nu=0.5$ 为特例，其 $u_x=0$!!

特殊形状：圆柱压头



定义圆柱下表面离<u>初始</u>接触位置的距离 $v(x)$ （向下为正）

几何关系：$\frac{1}{R} = \frac{\overbrace{-v''}^{\text{下表面}}}{(1+v'^2)^{3/2}}$



假设 $a \ll R$. 则在 $|x|<a$ 的区域内， $v'^2 \sim \theta^2 \sim \underbrace{a^2/R^2}_{\text{Moderate rotation!}} \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \simeq -v'' \quad \longrightarrow \quad v(x) = -\frac{1}{2R}x^2 + \mathcal{C}_1 x + \mathcal{C}_0$$

$$v_0(x) = -\frac{1}{2R}x^2 \quad \& \quad \mathcal{C}_1 = 0 \ (\text{对称性})$$

$$\frac{dv_0(X)}{dX} = -\frac{a^2}{R}X = -\underbrace{\frac{a^2}{2R}}_{b_1} U_1(X)$$

因此，根据 $\left(\frac{1}{a}b_0 + \mathcal{C}_1 - \pi K c_1\right)U_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}b_n - \pi K c_{n+1}\right)U_n = 0$ 以及平衡：

$$c_0 = \frac{F}{\pi a}$$

$$b_0 = 0, \quad \mathcal{C}_1 = 0, \quad c_1 = 0$$

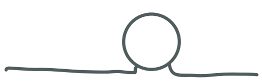
$$b_1 = -\frac{a^2}{2R}, \quad c_2 = -\frac{a}{2\pi RK}$$

$$b_n = 0, \quad c_{n+1} = 0, \quad n \geq 2$$

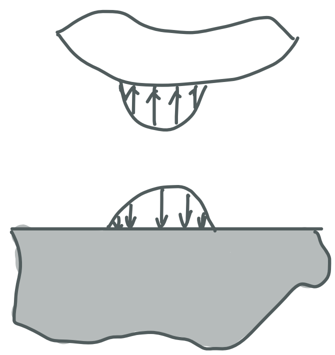
$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left[\frac{F}{\pi a} - \frac{a}{2\pi RK}(2t^2-1)\right] \quad \text{or} \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\left[\frac{1}{\pi}F - \frac{1}{2\pi RK}(2x^2-a^2)\right]$$

但是，在这个问题中，a 是未知的，物理上依赖于 F 有多大！

若 a "太小"，  ，重叠

若 a "太大"，  ，在 $|x|=a$ 处，存在"负压"，"粘附"效应.

因此，采用"物理启发"的边界条件： $p(x=\pm a)=0$

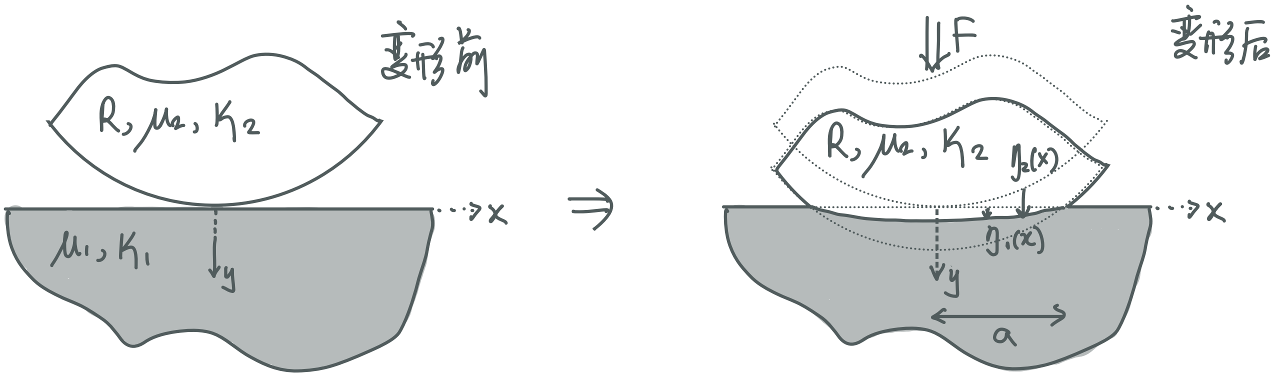


$$\Rightarrow \frac{F}{\pi}-\frac{a^2}{2\pi RK}=0 \qquad \text{i.e.,} \quad a=(2RKF)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x)=\frac{F}{\sqrt{a^2-x^2}}\left[\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi}\frac{1}{a^2}(2x^2-a^2)\right]=\frac{2F}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}}$$

注意 $p(x)$ 并不线性正比于 F，因为 a 也是 F 的函数！

弹性压头



令 $\eta_1(x)$ 为半平面的表面变形后向下的位移，η_2 为压头表面向下的位移

令 $v_1(x)$ 为半平面的表面变形后向下的变形，v_2 为压头表面向上的变形

几何关系：

$$\left.\begin{aligned} \eta_2(x) &= \eta_1(x)+\frac{1}{2R}x^2 \\ v_1(x) &= \eta_1(x) \\ v_2(x) &= C_0-\eta_2(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} v_1(x)+v_2(x)=C_0-\frac{1}{2R}x^2 \\ \frac{dv_1}{dx}+\frac{dv_2}{dx}=-\frac{x}{R} \end{cases}$$

物理关系：

$$\frac{dv_1}{dx}+\underset{v_1\text{线性部分}}{\cancelto{0}{\alpha_1}}=-K_1\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)}{x-\xi}d\xi$$

$$\frac{dv_2}{dx}+0=-K_2\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)}{x-\xi}d\xi$$

注：用集中力在半平面的 Green's function 来计算压头在接触区内的变形只有在 $a\ll R$ 时有效！

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{x}{R} = -(K_1+K_2)\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)}{x-\xi}\,d\xi}$$

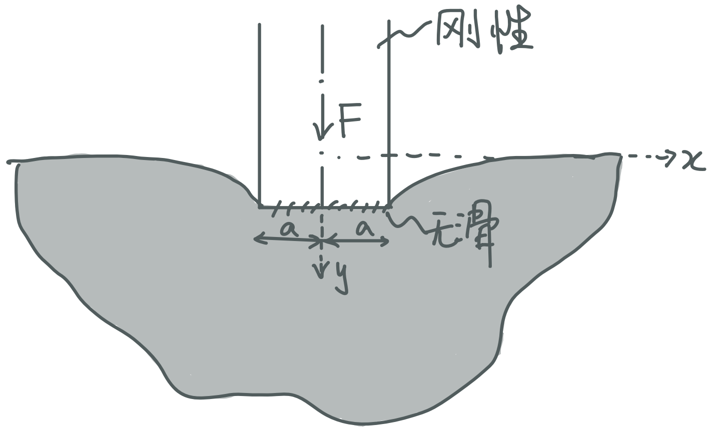
因此，只需将刚性压头解答中的 K 替换为(K_1+K_2)！

$$K = \frac{\kappa+1}{4\pi\mu} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{E}, & 平面应力 \\ \frac{1}{2\pi}\frac{1-\nu^2}{E}, & 平面应变 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_1^*}+\frac{1}{E_2^*},\quad E^* = \begin{cases} E, & 平面应力 \\ \frac{E}{1-\nu^2}, & 平面应变 \end{cases}}$$

同样地，对于两个圆柱的接触问题，可将刚性压头/半平面解答中的半径替换

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$

平压头无界面滑动接触

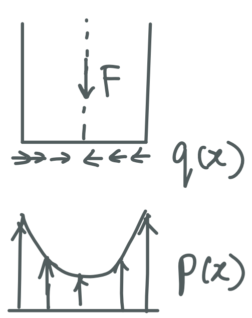


Mixed Boundary Value Problem

$|x| \leq a,\ y=0,\quad u_x = 0,\quad u_y = \delta$

$|x| \geq a,\ y=0,\quad \sigma_y = \tau_{yx} = 0$

受力分析图



$\xrightarrow{平衡}$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F = \int_{-a}^{a} p(x)\,dx$

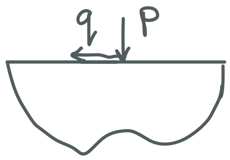
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow 0 = \int_{-a}^{a} q(x)\,dx$

$\Sigma M_0 = 0 \rightarrow 0 = \int_{-a}^{a} p(x)\,x\,dx$

对称性条件可自动满足

令 $u(x) = u_x(x, y=0)$，$v(x) = u_y(x, y=0)$，求解 $p(x)$，$q(x)$ 使得 $\frac{du}{dx}=0$，$\frac{dv}{dx}=0$！

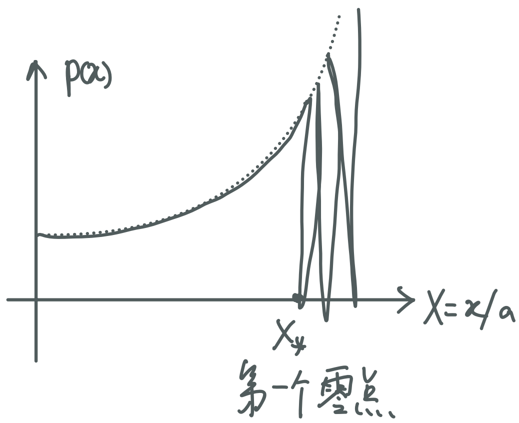
可构造半平面在法向和切向集中力作用下的 Green's function，得到一对积分方程！



$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = ⨍_{-a}^{a}\left[G_1(x-\xi)\,p(\xi) + G_2(x-\xi)\,q(\xi)\right]d\xi \\ \dfrac{dv}{dx} = ⨍_{-a}^{a}\left[G_3(x-\xi)\,p(\xi) + G_4(x-\xi)\,q(\xi)\right]d\xi \end{cases}$$

以 $p(x)$ 为例 介绍该解答特点。（q行为相似）

$$p(x) = \frac{F}{2\pi a\sqrt{1-(x/a)^2}}\left(\frac{1+\kappa}{\sqrt{\kappa}}\right)\cos\left[\frac{\ln\kappa}{2\pi}\ln\left(\frac{1-x/a}{1+x/a}\right)\right]$$



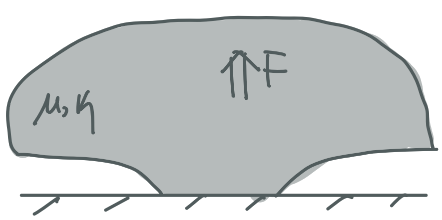
$$\frac{\ln\kappa}{2\pi}\ln\left(\frac{1-X_*}{1+X_*}\right) \underset{|X_*-1|\ll 0}{\simeq} \frac{\ln\kappa}{2\pi}\ln\left(\frac{1-X_*}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow X_* = 1-2e^{-\pi^2/\ln\kappa}$$

附注：① 对于平面应变，$\kappa=3-4\nu$，当$\nu=\frac{1}{4}$时，$X_* = 1-6.5\times10^{-7}$

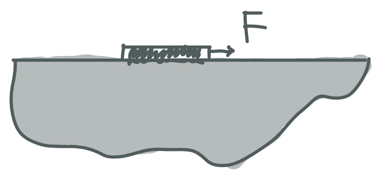
② 对于平面应变，$\nu=\frac{1}{2}$时，$\kappa=1$，$\underbrace{p(x)=\frac{F}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}}_{\text{无震荡}}$，平面应力时，永远有震荡

③ 该解答也对应于以下断裂力学问题



双材料体系的一个特例！

④ 思考如右问题



设 $p(x)=0$，求 $q(x)$？